Lineare Algebra für Physiker
4. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Matthias Schneider
Dr. Silke Horn
Dipl. Math. Dominik Kremer

SS 2013
14./17. Mai 2013

Gruppenübung

Aufgabe G1
Es sei A eine invertierbare $n \times n$-Matrix mit der inversen Matrix A^{-1}. Zeigen Sie, dass dann auch die Matrix A^T invertierbar ist und geben Sie die zugehörige inverse Matrix an.

Lösung: Es gilt $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. Dies folgt direkt aus der Definition der Inversen und den bekannten Eigenschaften der Transponierten einer Matrix durch folgende Gleichungsketten.

$$A^T \cdot (A^{-1})^T = (A^{-1} \cdot A)^T = E_n^T = E_n \qquad (A^{-1})^T \cdot A^T = (A \cdot A^{-1})^T = E_n^T = E_n$$

Aufgabe G2
Es sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

und entscheiden Sie, für welche $\lambda \in \mathbb{C}$ sie invertierbar ist.

Lösung:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 1 & 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \text{ (Linearität in den ersten 3 Zeilen)} \\
&= (\lambda-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda+3 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^3 \cdot (\lambda+3).
\end{aligned}$$

Damit ist die Matrix für alle $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{1, -3\}$ invertierbar.

Aufgabe G3
Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$ und die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Ist $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ linear unabhängig?

(b) Ist $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4}\}$ linear unabhängig?

(c) Ist $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4}\}$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$?

(d) Welche Teilmengen von $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4}\}$ bilden eine Basis von $\mathbb{R}^3$?

Begründen Sie jeweils ihre Aussagen.

Lösung:

(a) Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1\vec{v_1} + \lambda_2\vec{v_2} + \lambda_3\vec{v_3} = 0$. Dann ergibt sich folgendes Gleichungssystem.

$$\begin{array}{rcrcrcl} & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & & + & 2\lambda_3 & = & 0 \end{array}$$

Aus dem letzten Gleichungssystem erhält man nacheinander $\lambda_3 = 0, \lambda_2 = 0$ und $\lambda_1 = 0$.
$\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ ist also linear unabhängig.

(b) Wir wissen von letzten Übungsblatt, dass vier Vektoren im $\mathbb{R}^3$ immer linear abhängig sind.

(c) Seien $x, y, z \in \mathbb{R}$ beliebig. Durch den Ansatz $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1\vec{v_1} + \lambda_2\vec{v_2} + \lambda_3\vec{v_3} + \lambda_4\vec{v_4}$ mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & + & \lambda_4 & = & x \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & + & \lambda_4 & = & y \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & + & \lambda_4 & = & z \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rcrcrcrcl} & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & + & \lambda_4 & = & x \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & + & \lambda_4 & = & y \\ & & \lambda_2 & - & \lambda_3 & & & = & -y+z \end{array}$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{rcrcrcrcl} & & & & 2\lambda_3 & + & \lambda_4 & = & x+y-z \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & + & \lambda_4 & = & y \\ & & \lambda_2 & - & \lambda_3 & & & = & -y+z \end{array}$$

Eine Lösung des letzten Gleichungssystems ist

$$\lambda_4 = 0,\ \lambda_3 = \frac{x+y-z}{2},\ \lambda_2 = -y+z+\frac{x+y-z}{2} = \frac{x-y+z}{2},\ \lambda_1 = y - \frac{x+y-z}{2} = \frac{-x+y+z}{2}.$$

D.h. jedes Element aus $\mathbb{R}^3$ lässt sich als Linearkombination der Vektoren $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4}$ schreiben. Diese bilden also ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$.

(d) Je drei Vektoren aus $M := \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4}\}$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Alle anderen Teilmengen sind keine Basis des $\mathbb{R}^3$.

Beweis:

Man sieht leicht, dass der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ keine Linearkombination von $\vec{v_1}$ und $\vec{v_2}$ ist. Diese beiden Vektoren bilden also kein Erzeugendensystem und damit auch keine Basis des $\mathbb{R}^3$.

Analog ist der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ keine Linearkombination der Vektoren $\vec{v_1}$ und $\vec{v_4}$.Diese beiden Vektoren bilden also auch kein Erzeugendensystem und damit keine Basis des $\mathbb{R}^3$.

Durch vertauschen der Koordinaten erhält man, dass keine zweielementige Teilmenge von M ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$ ist. Natürlich wird $\mathbb{R}^3$ dann auch nicht von Mengen mit weniger Elementen erzeugt. D.h. jede Teilmenge von M, die Basis von $\mathbb{R}^3$ ist, muss mindestens drei Elemente haben. Da M selbst wegen Aufgabenteil (b) nicht linear unabhängig ist, muss eine solche Basis aus genau drei Elementen bestehen.

Wir zeigen nun, dass die Mengen $M_1 := \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ und $M_2 := \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_4}\}$ Basen von $\mathbb{R}^3$ sind. Durch Vertauschen der Koordinaten ergibt sich dann, dass alle dreielementrige Teilmengen von M eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

Wegen Aufgabenteil (a) ist M_1 linear unabhängig.

Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 \vec{v_1} + \lambda_2 \vec{v_2} + \lambda_3 \vec{v_4} = 0$. Dann ergibt sich folgendes Gleichungssystem.

$$\begin{array}{ccccccc} & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{cccccc} & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & \lambda_2 & & & = & 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{ccccccc} & & & & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & & & = & 0 \end{array}$$

Aus dem letzten Gleichungssystem erhält man nacheinander $\lambda_3 = 0, \lambda_2 = 0$ und $\lambda_1 = 0$.
M_2 ist also linear unabhängig.
Sei $x, y, z \in \mathbb{R}$ beliebig. Aus dem Gleichungssystem in Aufgabenteil (c) erhält man

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \frac{-x+y+z}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{x-y+z}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{x+y-z}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{-x+y+z}{2} \vec{v_1} + \frac{x-y+z}{2} \vec{v_2} + \frac{x+y-z}{2} \vec{v_3} \text{ und} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (-x+z) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-y+z) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (x+y-z) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-x+z)\, \vec{v_1} + (-y+z)\, \vec{v_2} + (x+y-z)\, \vec{v_4}\,.$$

D.h. sowohl M_1 als auch M_2 sind Erzeugendensysteme des $\mathbb{R}^3$.
Damit bilden beide Mengen eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe G4
In $\mathbb{R}^4$ betrachten wir die linearen Teilräume

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \, x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \right\} \quad \text{und} \quad V := \mathsf{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Bestimmen Sie je eine Basis von U, V, $U \cap V$ und $U + V$.

Lösung: Da die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind (keiner ist ein Vielfaches des Anderen), bilden sie eine Basis von V.
Der Untervektorraum U von $\mathbb{R}^4$ besteht aus allen Vektoren der Form

$$\begin{pmatrix} x_2 - x_3 + x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit $x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$. Man sieht leicht, dass die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind. Diese bilden somit eine Basis von U.
Der Untervektorraum V besteht aus allen Vektoren der Form

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu \\ -2\lambda \\ 3\lambda + 3\mu \\ \mu \end{pmatrix}$$

mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Setzen wir dies in die definierende Gleichung für U ein, so erhalten wir

$$0 = (\lambda + 2\mu) - (-2\lambda) + (3\lambda + 3\mu) - \mu = 6\lambda + 4\mu.$$

und somit $\mu = -\frac{3}{2}\lambda$. Damit besteht der Durchschnitt $U \cap V$ aus allen Vektoren der Form

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{3}{2}\lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Eine Basis von $U \cap V$ ist also der Vektor $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$. Der Vektorraum $U + V$ wird von den Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erzeugt. Eine Basis bestimmt man durch das Anwenden des Gaußalgorithmus.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bilden also eine Basis von $U + V$.

Hausübung

Aufgabe H1 (6 Punkte)
Wir betrachten den $\mathbb{R}^n$ und einen linearen Unterraum $V = \mathsf{Span}(B)$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) B ist linear unabhängig und für jedes B' mit $B \subsetneq B'$ gilt, dass B' linear abhängig ist.

(b) B ist eine Basis des $\mathbb{R}^n$.

(c) $\mathsf{Span}(B) = \mathbb{R}^n$ und für jedes $b \in B$ ist $\mathsf{Span}(B \setminus \{b\}) \subsetneq \mathbb{R}^n$.

Lösung: (a) $\Rightarrow$ (b) Sei also B linear unabhängig und für jedes B' mit $B \subsetneq B'$ gilt, dass B' linear abhängig ist. Zu zeigen ist, dass B eine Basis des $\mathbb{R}^n$ ist.

Sei $b \in \mathbb{R}^n \setminus B$. Aus (a) folgt dann, dass $B' := B \cup \{b\} \supsetneq B$ linear abhängig ist. Außerdem sagt (a), dass B linear unabhängig ist, also ist $b \in \mathsf{Span}(B)$. Dies gilt für alle $b \in \mathbb{R}^n \setminus B$, somit gilt $\mathsf{Span}(B) = \mathbb{R}^n$. Damit ist B eine Basis von $\mathbb{R}^n$.

(b) $\Rightarrow$ (c) Sei nun B eine Basis. Zu zeigen ist dann zum Einen, dass $\mathsf{Span}(B) = \mathbb{R}^n$ und zum Anderen, dass wir für jedes $b \in B$ haben, dass $\mathsf{Span}(B \setminus \{b\}) \subsetneq \mathbb{R}^n$.

Der erste Teil folgt direkt aus der Definition einer Basis. Für den zweiten Teil nehmen wir an, dass es ein $b \in B$ gibt, sodass $\mathsf{Span}(B \setminus \{b\}) = \mathbb{R}^n$. Wegen $b \in \mathbb{R}^n$ ist dann auch $b \in \mathsf{Span}(B \setminus \{b\})$. Das ist aber ein Widerspruch dazu, dass B linear unabhängig ist.

(c) $\Rightarrow$ (a) Es gelte also, dass $\mathsf{Span}(B) = \mathbb{R}^n$ und dass für alle $b \in B$ gilt, dass $\mathsf{Span}(B \setminus \{b\}) \subsetneq \mathbb{R}^n$. Zu zeigen ist, dass B linear unabhängig ist und, dass jedes B' mit $B' \supsetneq B$ linear abhängig ist.

Wir zeigen zunächst den ersten Teil. Angenommen, B ist linear abhängig, d.h. es gibt ein $b \in B$, welches eine Linearkombination von Vektoren aus $B \setminus \{b\}$ ist. Dann ist $b \in \mathsf{Span}(B \setminus \{b\})$ und deswegen $B \subseteq \mathsf{Span}(B \setminus \{b\})$. Dann folgt aber $\mathsf{Span}(B \setminus \{b\}) = \mathsf{Span}(B)$ und wegen $\mathsf{Span}(B) = \mathbb{R}^n$ dann $\mathsf{Span}(B \setminus \{b\}) = \mathbb{R}^n$. Das ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung.

Für den zweiten Teil sei $B' \supsetneq B$ und $b \in B' \setminus B$. Wegen $\mathsf{Span}(B) = \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}^n \setminus B$ ist b eine Linearkombination von Vektoren in $B' \setminus \{b\}$, also ist B' linear abhängig.

Aufgabe H2 (6 Punkte)
Bestimmen Sie für den von den Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^4$ aufgespannten linearen Teilraum eine Basis.

Lösung: Wir betrachten die Matrix, welche die gegebenen Vektoren als Zeilenvektoren enthält und bringen diese mit Hilfe des Gauß-Algorithmus auf Stufenform. Die Zeilen der entstehenden Matrix, welche nicht Null sind, sind dann die gesuchten Basisvektoren.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -4 & -4 & 7 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \\ 0 & -5 & -5 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 41 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 35 \end{pmatrix}$ bilden somit eine Basis des betrachteten Untervektorraums von $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe H3 (6 Punkte)
Wir betrachten den reellen Vektorraum $V = \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ der Polynomfunktionen vom Grad kleiner oder gleich drei. Man sieht leicht, dass die Menge $B = (1, x, x^2, x^3)$ eine Basis von V bildet. Zusätzlich betrachten wir noch die Menge $B' = (1, x + 1, (x + 1)^2, (x + 1)^3)$.

(a) Zeigen Sie, dass B' eine Basis von $V = \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ ist.

(b) Bestimmen Sie die Koordinaten der Basisvektoren aus B' bezüglich der Basis B, d. h. stellen Sie alle Basisvektoren aus B' als Linearkombination der Vektoren aus B dar.

(c) Gegeben sei die Polynomfunktion $p(x) = x^3 + 3x^2 - 2$. Was sind die Koordinaten von p bezüglich der Basis B und bezüglich der Basis B'?

(d) Was sind die Koordinaten der Basisvektoren aus B bezüglich der Basis B'?

Lösung:

(a) Da jede Basis von V die gleiche Anzahl von Elementen hat (in diesem Fall vier, da B vier Elemente hat) und jede linear unabhängige Teilmenge von V zu einer Basis ergänzt werden kann, reicht es zu zeigen, dass B' linear unabhängig ist.

Seien also $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2(x + 1) + \lambda_3(x + 1)^2 + \lambda_4(x + 1)^3 = 0$. Dann folgt

$$0 = \lambda_1 + \lambda_2(x+1) + \lambda_3(x^2+2x+1) + \lambda_4(x^3+3x^2+3x+1) = \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+(\lambda_2+2\lambda_3+3\lambda_4)x+(\lambda_3+3\lambda_4)x^2+\lambda_4 x^3.$$

Da B eine Basis von V ist ergibt sich hieraus das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & + & \lambda_4 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & + & 3\lambda_4 & = & 0 \\ & & & & \lambda_3 & + & 3\lambda_4 & = & 0 \\ & & & & & & \lambda_4 & = & 0 \end{array}.$$

Daraus folgt nacheinander $\lambda_4 = 0, \lambda_3 = 0, \lambda_2 = 0$ und $\lambda_1 = 0$.
D.h. B' ist linear unabhängig.

(b) Es ist

$$\begin{aligned}
1 &= 1\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + 0\cdot x^3\\
x+1 &= 1\cdot 1 + 1\cdot x + 0\cdot x^2 + 0\cdot x^3\\
(x+1)^2 &= 1\cdot 1 + 2\cdot x + 1\cdot x^2 + 0\cdot x^3\\
(x+1)^3 &= 1\cdot 1 + 3\cdot x + 3\cdot x^2 + 1\cdot x^3 .
\end{aligned}$$

D.h. es gilt

$$[1]_B = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad [x+1]_B = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad [(x+1)^2]_B = \begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix}, \quad [(x+1)^3]_B = \begin{pmatrix}1\\3\\3\\1\end{pmatrix}.$$

(c) Offensichtlich ist

$$[p]_B = \begin{pmatrix}-2\\0\\3\\1\end{pmatrix}.$$

Für die Koordinaten bezüglich B' setzt man an:

$$p(x) = x^3 + 3x^2 - 2 = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2(x+1) + \lambda_3(x+1)^2 + \lambda_4(x+1)^3 .$$

Analog zur Rechnung im Aufgabenteil (a) ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccc}
\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & + & \lambda_4 & = & -2\\
 & & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & + & 3\lambda_4 & = & 0\\
 & & & & \lambda_3 & + & 3\lambda_4 & = & 3\\
 & & & & & & \lambda_4 & = & 1 .
\end{array}$$

Daraus ergibt sich nacheinander $\lambda_4 = 1, \lambda_3 = 0, \lambda_2 = -3$ und $\lambda_1 = -2 - 1 - 0 + 3 = 0$.
Wir erhalten also

$$[p]_{B'} = \begin{pmatrix}0\\-3\\0\\1\end{pmatrix}.$$

(d) Mit Hilfe einer Rechnung wie im Aufgabeteil (c) oder mit Hilfe von Matrizen oder durch direktes Hinsehen erhält man

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
1 & = & 1\cdot 1 & + & 0\cdot(x+1) & + & 0\cdot(x+1)^2 & + & 0\cdot(x+1)^3\\
x & = & -1\cdot 1 & + & 1\cdot(x+1) & + & 0\cdot(x+1)^2 & + & 0\cdot(x+1)^3\\
x^2 & = & 1\cdot 1 & - & 2\cdot(x+1) & + & 1\cdot(x+1)^2 & + & 0\cdot(x+1)^3\\
x^3 & = & -1\cdot 1 & + & 3\cdot(x+1) & - & 3\cdot(x+1)^2 & + & 1\cdot(x+1)^3 .
\end{array}$$

D.h. die gesuchten Koordinaten der Basisvektoren aus B sind

$$[1]_{B'} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad [x]_{B'} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad [x^2]_{B'} = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}, \quad [x^3]_{B'} = \begin{pmatrix}-1\\3\\-3\\1\end{pmatrix}.$$