Lineare Algebra für Physiker
3. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Matthias Schneider
Dr. Silke Horn
Dipl. Math. Dominik Kremer

SS 2013
7./10. Mai 2013

Gruppenübung

Aufgabe G1
Berechnen Sie die Determinate der folgenden Matrizen:

(a)
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

(b)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

(c)
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Lösung:

(a)
$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = -16$$

(b)
$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 0$$

(c)
$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 2$$

Aufgabe G2
Entscheiden Sie, ob die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist und bestimmen Sie gegebenenfalls die Inverse.

Lösung: Die Matrix ist invertierbar; es gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -4 & 3 \\ 1 & 8 & -3 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe G3
Wir haben auf dem letzten Übungsblatt gesehen, dass $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$. Kann man auch bei Produkten von mehr als zwei Matrizen die Reihenfolge beliebig permutieren?

Lösung: Nein, Produkte mit mehr als zwei Faktoren darf man nur zyklisch tauschen, also z. B.

$$\mathrm{Tr}(A_1 \dots A_k) = \mathrm{Tr}(A_i \dots A_k A_1 \dots A_{i-1})$$

für alle $i = 1, \dots, n$.

Für drei Matrizen A, B, C gilt nicht $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(ACB)$. Gegenbeispiel: Mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt

$$ABC = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad ACB = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G4

(a) Zeigen Sie, dass man jede Permutation $\pi \in S_n, n \in \mathbb{N}$ als Produkt von Transpositionen schreiben kann.

(b) Schreiben Sie die Permutation

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \in S_5$$

als Produkt von Transpositionen und bestimmen Sie $\operatorname{sgn} \pi$. (Die Notation ist dabei so zu verstehen, dass $\pi(1) = 3, \pi(2) = 1, \ldots,$ ist.)

(c) Bestimmen Sie alle Elemente von S_4.

Lösung:

(a) Wir zeigen die Aussage per Induktion nach n. Für $n \leq 2$ ist die Aussage richtig. Sei nun $n \geq 3$ und sei $\pi \in S_n$. Falls $\pi(n) = n$ kann man π nach Induktion als Produkt von Transpositionen schreiben. Ansonsten definiere $\pi' = \sigma_{\pi(n)n} \circ \pi$. (Dabei ist σ_{ij} die Transposition, die i und j vertauscht.) Dann gilt $\pi'(n) = \sigma_{\pi(n)n}(\pi(n)) = n$. Wie oben kann man also π' und somit auch π als Produkt von Transpositionen schreiben.

(b) $\pi = \sigma_{13} \circ \sigma_{34} \circ \sigma_{42}$ und $\operatorname{sgn} \pi = -1$

(c)

$$\begin{aligned} S_4 = \{&(1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432), \\ &(2134), (2143), (2314), (2341), (2413), (2431), \\ &(3124), (3142), (3214), (3241), (3412), (3421), \\ &(4123), (4132), (4213), (4231), (4312), (4321)\} \end{aligned}$$

Eine Permutation π ist dabei als $(\pi(1)\pi(2)\pi(3)\pi(4))$ notiert.

Aufgabe G5

Berechnen Sie die Determinante der $(n \times n)$-Matrix

$$A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

bei der $a_{i,j} = 1$ für $i = j + 1$ oder $j = i + 1$ gilt, während alle anderen Einträge $a_{i,j}$ Null sind.

Lösung: Es gilt

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{\sigma(1),1} \cdot a_{\sigma(2),2} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(n),n} \,.$$

Da σ eine Bijektion ist kommt in jedem der Terme $a_{\sigma(1),1} \cdot a_{\sigma(2),2} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(n),n}$ aus jeder Spalte und jeder Zeile der Matrix A genau ein Eintrag vor. Außerdem gibt es in der letzten Zeile und der letzten Spalte jeweils nur einen Eintrag ungleich Null, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{\sigma(1),1} \cdot a_{\sigma(2),2} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(n),n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n, \sigma(n-1)=n, \sigma(n)=n-1} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{\sigma(1),1} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(n-2),n-2} \cdot a_{n,n-1} \cdot a_{n-1,n} \\ &= \operatorname{sgn}((n-1 \;\; n)) \cdot a_{n,n-1} \cdot a_{n-1,n} \cdot \sum_{\sigma \in S_{n-2}} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{\sigma(1),1} \cdot a_{\sigma(2),2} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(n-2),n-2} \\ &= -\det\left((a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n-2}\right) . \end{aligned}$$

Durch wiederholtes Anwenden dieser Formel und unter Beachtung der Tatsache, dass für $n = 1$ $\det A = \det(0) = 0$ und für $n = 2$ $\det A = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$ gilt erhält man das folgende.

Für n ungerade: $|\det A| = \det(0) = 0$ und damit auch $\det A = 0$.

Für n gerade: $\det A = (-1)^{\frac{n}{2}}$.

Insgesamt ergibt sich

$$\det A = \begin{pmatrix} 0 & \text{für} & n \equiv \pm 1 \mod 4 \\ 1 & \text{für} & n \equiv 0 \mod 4 \\ -1 & \text{für} & n \equiv 2 \mod 4 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe H1 (6 Punkte)

(a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq 4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe der Definition der Determinante.

(b) Berechnen Sie die Determinante der Matrix A mit Hilfe des Gauß-Algorithmus.
(Bringen Sie dazu die Matrix in obere Dreiecksgestalt, beachten Sie wie sich die Determinante dabei verändert und berechnen Sie im letzten Schritt die Determinante der Matrix in oberer Dreiecksgestalt wie in der Vorlesung behandelt.)

(c) Betrachten Sie nun die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a & b \\ 0 & a & 1 & 3 \\ 0 & b & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$ beliebig. Bestimmen Sie die Determinante von B.

Lösung:

(a) Wir entwickeln nach der ersten Spalte:

Nach Defintion der Determinante gilt

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_4} \operatorname{sgn}(\sigma)\cdot a_{\sigma(1),1}\cdot\dots\cdot a_{\sigma(4),4}\,.$$

Ein Produkt der Gestalt $\operatorname{sgn}(\sigma)\cdot a_{\sigma(1),1}\cdot\dots\cdot a_{\sigma(4),4}$ ist nur dann ungleich Null, wenn $a_{\sigma(i),i} \neq 0$ für $i = 1,\dots,4$ gilt. Da in der ersten Spalte der Matrix nur ein Eintrag ungleich Null ist, kann dies nur gelten, wenn $\sigma(1) = 2$ ist.

Da σ bijektiv ist, kommt in dem Produkt $a_{\sigma(1),1}\cdot\dots\cdot a_{\sigma(4),4}$ genau ein Matrixeintrag pro Zeile vor. Da in der ersten Zeile nur ein Eintrag ungleich Null ist muss $\sigma(2) = 1$ gelten, damit $\operatorname{sgn}(\sigma)\cdot a_{\sigma(1),1}\cdot\dots\cdot a_{\sigma(4),4} \neq 0$ gilt.

Für $\sigma \in S_n$ mit $\sigma(1) = 2$ und $\sigma(2) = 1$ gibt es nur die zwei Möglichkeiten

$$\sigma_1 = (1\,2) \text{ und } \sigma_2 = (1\,2)(3\,4)\,.$$

Nach einer aus der Vorlesung bekannten Formel für das Vorzeichen von Permutationen, die sich aus Transpositionen zusammensetzen ergibt sich

$$\operatorname{sgn}(\sigma_1) = -1 \text{ und } \operatorname{sgn}(\sigma_2) = 1$$

D.h. die Summe in der Definition der Determinante ergibt sich zu

$$\det A = \operatorname{sgn}(\sigma_1)\cdot a_{\sigma_1(1),1}\cdot\dots\cdot a_{\sigma_1(4),4} + \operatorname{sgn}(\sigma_2)\cdot a_{\sigma_2(1),1}\cdot\dots\cdot a_{\sigma_2(4),4} = -1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 1\cdot 3\cdot 3 = 8$$

(b) Mittels des Gauß-Algorithmus erhält man

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

Die letzte Matrix hat obere Dreiecksgestalt, ihre Determinante ist also das Produkt der Einträge auf der Hauptdiagonalen. D.h. es gilt

$$\det A = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} = -1\cdot 1\cdot 1\cdot(-8) = 8.$$

(c) Man kann die Argumentation aus Aufgabenteil (a) genauso auf die Matrix B anwenden. Es ergeben sich dabei genau dieselben Gleichungen, d.h. es gilt

$$\det B = \det A = 8\,.$$

Aufgabe H2 (6 Punkte)
Es seien beliebige quadratische Matrizen A und B mit Einträgen aus $\mathbb{C}$ gegeben. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $A \cdot A = E \Longrightarrow \det(A) = \pm 1$.

(b) A ist nicht invertierbar $\Longrightarrow AB$ ist nicht invertierbar.

(c) $\det(A) + \det(B) = \det(A + B)$.

(d) $A^3 = 0 \Longrightarrow A = 0$.

(e) $A^3 = 0 \Longrightarrow (E - A)^{-1} = E + A + A^2$.

(f) $\det(A) \in \mathbb{R} \Longrightarrow$ alle Einträge in A sind reell.

Lösung:

(a) Diese Aussage ist richtig.
Sei $A \cdot A = E$. Es gilt $\det(A \cdot A) = \det(A) \cdot \det(A) = (\det(A))^2$ und $\det(E) = 1$. Also folgt

$$1 = \det(E) = \det(A \cdot A) = (\det(A))^2$$

und damit

$$\det(A) = \pm 1\,.$$

(b) Diese Aussage ist richtig.
Wenn A nicht invertierbar ist, gilt $\det(A) = 0$. Also ist auch $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = 0$ und damit AB nicht invertierbar.

(c) Diese Aussage ist falsch.
Wähle $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dann gilt $\det(A) + \det(B) = 0 + 1 = 1$ und

$$\det(A + B) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 1 = \det(A) + \det(B)\,.$$

(d) Diese Aussage ist falsch.
Wähle $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dann gilt $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und damit auch $A^3 = 0$, aber $A \neq 0$.

(e) Diese Aussage ist richtig.
Wenn $A^3 = 0$ ist, dann gilt auch

$$\begin{aligned} (E - A)(E + A + A^2) &= E + A + A^2 - A - A^2 - A^3 = E - A^3 = E - 0 = E \text{ und} \\ (E + A + A^2)(E - A) &= E + A + A^2 - A - A^2 - A^3 = E - A^3 = E - 0 = E\,. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$(E - A)^{-1} = E + A + A^2\,.$$

(f) Diese Aussage ist falsch.
Wähle $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$. Dann hat A nicht-reelle Einträge, aber $\det(A) = -1 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe H3 (6 Punkte)
Zeigen Sie, dass $n + 1$ Vektoren in $\mathbb{K}^n$ immer linear abhängig sind.

Lösung: Die Vektoren $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{K}^n$ sind genau dann linear abhänging, wenn das lineare Gleichungssytem

$$\begin{pmatrix} v_1 & \ldots & v_k \end{pmatrix} x = 0$$

eine nichttriviale Lösung $x \in \mathbb{K}^k$ hat. Für $k > n$ ist das laut Vorlesung immer der Fall.