Lineare Algebra für Physiker
2. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Matthias Schneider
Dr. Silke Horn
Dipl. Math. Dominik Kremer

SS 2013
30. April/3. Mai 2013

Gruppenübung

Aufgabe G1

(a) Folgt aus „Wenn es regnet, gibt es Wolken.“, dass es keine Wolken gibt, wenn es nicht regnet?

(b) Stellen Sie den obigen Schluss mithilfe der Aussagenlogik dar und begründen Sie, warum er falsch ist.

Lösung: Angenommen, die Variable p stellt dar, dass es regnet, und die Variable q stellt dar, dass es Wolken gibt. Die Aussage „Wenn es regnet, gibt es Wolken.“ wird durch $p \Rightarrow q$ dargestellt und dass es keine Wolken gibt, wenn es nicht regnet, wird durch $\neg p \Rightarrow \neg q$ dargestellt. Wenn p falsch ist und q wahr ist, ist $p \Rightarrow q$ erfüllt, die Aussage $\neg p \Rightarrow \neg q$ aber nicht.

Aufgabe G2

Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden linearen Gleichungssysteme.

(a)

$$\begin{array}{rrrrcr} 2x & +y & -z & +t & = & 0 \\ x & +3y & & -t & = & 1 \\ & y & & +t & = & -2 \\ & -2y & & -2t & = & 1 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rrrcr} x & +y & +z & = & 0 \\ x & -y & +z & = & 0 \\ -x & -y & -z & = & 0 \end{array}$$

Lösung:

(a) Multiplizieren Sie die vorletzte Zeile mit -2. Daraus folgt $-2y - 2t = 4$. Aber gemäß der letzten Zeile gilt $-2y - 2t = 1$, was ein Widerspruch ist. Deshalb gibt es keine Lösung.

(b) Die letzte Zeile ist wie die erste, die mit -1 multipliziert wurde. Aus der ersten Zeile minus der zweiten Zeile, leitet man $y = 0$ her. Aus der Summe der zwei ersten Zeilen, folgt $z = -x$. Die Lösungsmenge ist also $\{(x, y, z) \mid y = 0 \wedge z = -x\}$.

Aufgabe G3

Bestimmen Sie alle Untervektorräume des $\mathbb{R}^2$.

Lösung: Die einzigen Unterräume vom $\mathbb{R}^2$ sind die beiden trivialen $(0, 0)$ und $\mathbb{R}^2$, sowie alle Ursprungsgeraden.

Wir zeigen zunächst, dass Ursprungsgeraden Unterräume sind. Sei also $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, dann ist $U := \mathbb{R}u$ ein Unterraum, weil die Bedingungen

- $U \neq \emptyset$, da zum Beispiel $u = 1 \cdot u \in U$
- für $x, y \in U$ sei $x = \alpha u$, $y = \beta u$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, dann ist $x + y = \alpha u + \beta u = (\alpha + \beta)u \in U$
- für $a \in \mathbb{R}$ und x wie eben ist $ax = a\alpha u = (a\alpha)u \in U$

erfüllt sind.

Wir zeigen nun, dass, falls $U \neq \{(0,0)\}$ nicht durch eine Ursprungsgerade gegeben ist, U schon gleich $\mathbb{R}^2$ ist.

Seien dazu $u = (u_1, u_2) \in U \setminus \{(0,0)\}$ und $v = (v_1, v_2) \in U \setminus \{(0,0)\}$ mit $v \notin \mathbb{R}u$. Angenommen, es ist $u_1 v_2 = u_2 v_1$. Im Fall $u_1 = 0$ wäre dann $u_2 \neq 0 = v_1$, also $v = (0, v_2) = \frac{v_2}{u_2}(0, u_2) \in \mathbb{R}u$, das ist aber ein Widerspruch. Im Fall $u_1, u_2 \neq 0$ ist $u_1 v_2 = u_2 v_1$ äquivalent zu $\frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2}$ und damit $v = \frac{v_1}{u_1}u$. Also gilt, dass $u_1 v_2 - u_2 v_1 \neq 0$ ist.

Wir wählen nun einen beliebigen Punkt $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$. Dann setzen wir

$$\alpha := \frac{a_1 v_2 - a_2 v_1}{u_1 v_2 - u_2 v_1} \quad \text{und} \quad \beta := \frac{u_1 a_2 - u_2 a_1}{u_1 v_2 - u_2 v_1}.$$

Dies ist möglich, da wir eben $u_1 v_2 - u_2 v_1 \neq 0$ gezeigt haben. Dann ist aber

$$(a_1, a_2) = \alpha(u_1, u_2) + \beta(v_1, v_2) \in U.$$

Also folgt die Behauptung.

Aufgabe G4 (Vektorräume)
Zeigen Sie, dass $V = \mathbb{R}$ mit den folgenden Operationen einen $\mathbb{R}$-Vektorraum bildet.

$$\begin{aligned} +_V &: V \times V \to V, & (x, y) &\mapsto x + y - 1 \\ \cdot_V &: \mathbb{R} \times V \to V, & (\lambda, x) &\mapsto \lambda \cdot x - \lambda + 1 = \lambda x - \lambda + 1 \end{aligned}$$

Dabei bezeichnen $+$ und $\cdot$ die gewöhnliche Addition bzw. Multiplikation der komplexen Zahlen.

Lösung: Es ist zu beachten, dass das neutrale Element der Addition, welches normalerweise mit Null bezeichnet wird, hier das Element $e = 1 \in \mathbb{R}$ ist.

Für den Beweis seien im Folgenden $x, y, z, \lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Die zu zeigenden Aussagen ergeben sich durch die folgenden einfachen Umformungen.

$$\begin{aligned} x +_V (y +_V z) &= x +_V (y + z - 1) = x + (y + z - 1) - 1 = (x + y - 1) + z - 1 = (x + y - 1) +_V z \\ &= (x +_V y) +_V z \end{aligned}$$

$$x +_V e = x +_V 1 = x + 1 - 1 = x$$

$$x +_V (-1) \cdot_V x = x +_V (-x + 1 + 1) = x + (-x) + 2 - 1 = 1 = e$$

$$x +_V y = x + y - 1 = y + x - 1 = y +_V x$$

$$\begin{aligned} \lambda \cdot_V (x +_V y) &= \lambda \cdot_V (x + y - 1) = \lambda(x + y - 1) - \lambda + 1 = \lambda x + \lambda y - \lambda - \lambda + 1 \\ &= \lambda x - \lambda + 1 + \lambda y - \lambda + 1 - 1 = (\lambda x - \lambda + 1) +_V (\lambda y - \lambda + 1) \\ &= \lambda \cdot_V x +_V \lambda \cdot_V y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot_V x &= (\lambda_1 + \lambda_2)x - (\lambda_1 + \lambda_2) + 1 = \lambda_1 x - \lambda_1 + 1 + \lambda_2 x - \lambda_2 + 1 - 1 \\ &= (\lambda_1 x - \lambda_1 + 1) +_V (\lambda_2 x - \lambda_2 + 1) = \lambda_1 \cdot_V x +_V \lambda_2 \cdot_V x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 \cdot_V (\lambda_2 \cdot_V x) &= \lambda_1 \cdot_V (\lambda_2 x - \lambda_2 + 1) = \lambda_1(\lambda_2 x - \lambda_2 + 1) - \lambda_1 + 1 = (\lambda_1 \lambda_2)x - (\lambda_1 \lambda_2) + 1 \\ &= (\lambda_1 \lambda_2) \cdot_V x \end{aligned}$$

$$1 \cdot_V x = x - 1 + 1 = x$$

Insgesamt folgt, dass $V = \mathbb{R}$ mit den angegebenen Operationen einen Vektorraum bildet.

Hausübung

Aufgabe H1 (6 Punkte)
Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme:

(a)

$$\begin{array}{cccl} x & +y & +z & = 1 \\ x & +2y & +4z & = 2 \\ x & +3y & +9z & = 3 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{cccccr} 2x & & & +4t & = & 1 \\ x & +3y & -2z & -t & = & 3 \\ & & & t & = & -2 \\ x & -2y & & -2t & = & 3 \end{array}$$

Lösung:

(a) Die einzige Lösung ist $x = z = 0$ und $y = 1$.

(b) $t = -2$, dann kann man x bestimmen, dann y, und endlich z. Man erhält $(t, x, y, z) = (-2, \frac{9}{2}, \frac{11}{4}, \frac{47}{8})$.

Aufgabe H2 (6 Punkte)
Seien $A \in \mathbb{K}^{m\times n}, B \in \mathbb{K}^{n\times p}$.

(a) Zeigen Sie: $(AB)^T = B^T A^T$.

(b) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Zeigen Sie: $(AB)^* = B^* A^*$.

(c) Sei nun $m = p$. (Dann sind $AB \in \mathbb{K}^{m\times m}$ und $BA \in \mathbb{K}^{n\times n}$ quadratisch.) Zeigen Sie $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$.

Lösung:

(a) Es gilt

$$(AB)^T_{k\ell} = (AB)_{\ell k} = \sum_{i=1}^{n} a_{\ell i} b_{ik} = \sum_{i=1}^{n} b_{ik} a_{\ell i} = (B^T A^T)_{k\ell}.$$

(b) Es gilt

$$(AB)^*_{k\ell} = (\overline{AB})_{\ell k} = \sum_{i=1}^{n} \overline{a_{\ell i}}\,\overline{b_{ik}} = \sum_{i=1}^{n} \overline{b_{ik}}\,\overline{a_{\ell i}} = (B^* A^*)_{k\ell}.$$

(c) Es gilt

$$\operatorname{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} b_{ji} a_{ij} = \operatorname{Tr}(BA).$$

Aufgabe H3 (6 Punkte)
Seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_n \in V, v_i \neq 0$ für $i = 1, \ldots, n$.

(a) Beweisen Sie: Wenn es $i, 1 \leq i \leq n$ gibt mit $\mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_n\} = \mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n\}$, dann sind $v_1, \ldots, v_n$ linear abhängig.

(b) Gilt die Umkehrung auch? Beweisen Sie Ihre Aussage.

Lösung:

(a) Wir können o. B. d. A. annehmen, dass $i = n$ ist, d. h. $\mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_n\} = \mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$. Wegen $v_n \in \mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ gibt es $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{K}$, sodass $v_n = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{n-1} v_{n-1}$. Daraus folgt $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{n-1} v_{n-1} - v_n = 0$. Somit sind $v_1, \ldots, v_n$ linear abhängig.

(b) Angenommen $v_1, \ldots, v_n$ sind linear abhängig. Dann gibt es eine Linearkombination $0 = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$, wobei mindestens ein $\lambda_i \neq 0$ ist. O. B. d. A. sei $\lambda_n \neq 0$. Dann ist $v_n = \frac{1}{\lambda_n}(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{n-1} v_{n-1}) \in \mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ und somit $\mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_n\} = \mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$.