Lineare Algebra für Physiker
13. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Matthias Schneider
Dr. Silke Horn
Dipl.-Math. Dominik Kremer

SS 2013
16./19. Juli 2013

Hinweis: In der Gruppenübung wird diese Woche auch die Probeklausur besprochen. Sie sind herzlich eingeladen, Ihre Fragen zu den Aufgaben dort einzubringen.

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Der Satz vom Fußball)
Betrachten Sie ein Fußballspiel, das in zwei Halbzeiten von je 90 Minuten zwischen zwei Mannschaften ausgetragen wird. Auf dem Spielfeld gibt es einen Anstoßpunkt, auf den zu Beginn jeder der beiden Halbzeiten ein perfekt runder Fußball aufgelegt wird. Zeigen Sie den *Satz vom Fußball*: Es gibt zwei Punkte auf dem Fußball, die zu Spielbeginn und zur Halbzeit genau an der gleichen Stelle liegen.

Tipp: Was hat das mit Eigenwerten von Abbildungen aus SO(3) zu tun?

Lösung: Vergleichen wir den Ball zu Spielbeginn und zur Halbzeit, dann sehen wir, dass auf ihn eine Abbildung $A \in \mathrm{SO}(3)$ angewendet wurde. Der Satz vom Fußball bedeutet also, dass A den Eigenwert 1 haben muss: Dann gibt es einen Punkt v auf dem Fußball, so dass $Av = v$ und $A(-v) = -v$ gilt. Die Punkte v und $-v$ sind dann zu Spielbeginn und zur Halbzeit an der gleichen Stelle.

Da das charakteristische Polynom von A Grad 3 hat, besitzt A auf jeden Fall einen reellen Eigenwert. Es ist nämlich nicht möglich, dass A genau zwei reelle Eigenwerte hat: Ist $\lambda \notin \mathbb{R}$ ein Eigenwert, dann auch $\overline{\lambda} \notin \mathbb{R}$. Es gibt also zwei Fälle.

Fall 1: A hat drei reelle Eigenwerte. Da A orthogonal ist, muss jeder Eigenwert entweder 1 oder -1 sein. Wären alle drei Eigenwerte -1, dann folgte $\det A = (-1)^3 = -1$, also $A \notin \mathrm{SO}(3)$, ein Widerspruch.

Fall 2: A hat genau einen reellen Eigenwert. Sind λ_1, λ_2 die beiden nicht reellen Eigenwerte, dann gilt $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$, also $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = |\lambda_1|^2 = 1$. Der reelle Eigenwert kann nur 1 oder -1 sein, da A orthogonal ist. Wäre er -1, dann folgte

$$\det A = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \lambda_1\overline{\lambda_1} \cdot (-1) = 1 \cdot (-1) = (-1),$$

also $A \notin \mathrm{SO}(3)$, ein Widerspruch.

In beiden Fällen hat A also den Eigenwert 1, was den Satz vom Fußball zeigt.

Aufgabe G2 (Hauptsatz über reelle orthogonale Matrizen)
Sei

$$A = \frac{1}{a}\begin{pmatrix} b & 0 & 4 \\ c & 5 & 0 \\ -d & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

mit $a > 0$ und $b, c, d \geq 0$.

(a) Wählen Sie die Parameter a, b, c, d so, dass A eine orthogonale Matrix wird.

(b) Ist A über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ diagonalisierbar?

(c) Finden Sie eine orthogonale Matrix Q, so dass

$$Q^T A Q = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

mit $t \in [0, 2\pi)$ und $\lambda \in \{-1, 1\}$ gilt.

Lösung:

(a) Da die Spalten Einheitslänge haben müssen, folgt $a = 5$. Da sie aufeinander senkrecht stehen müssen, folgt $c = 0$. Für die anderen Variablen folgt $b^2 + d^2 = 25$ und $4b = 3d$. Wir setzen $b = \frac{3}{4}d$ ein und erhalten $\frac{25}{16}d^2 = 1$. Aus $d \geq 0$ folgt damit $d = \frac{4}{5}$ und somit $b = \frac{3}{5}$. Die Matrix lautet daher

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Wir berechnen die komplexen Eigenwerte und ein Orthonormalsystem aus Eigenvektoren von A. Wir erhalten dafür

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ zum EW } \frac{3+4i}{5}, \qquad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ zum EW } \frac{3-4i}{5}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ zum EW } 1.$$

Insbesondere sehen wir, dass A nur über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar ist.

(c) Wir setzen

$$w_1 = \frac{\operatorname{Im}(v_1)}{|\operatorname{Im}(v_1)|} = \frac{1}{\sqrt{2}i}(v_1 - v_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \frac{\operatorname{Re}(v_1)}{|\operatorname{Re}(v_1)|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 + v_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad w_3 = v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sowie

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und erhalten

$$Q^T A Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Setzen wir also $t = \arccos\frac{3}{5}$, dann folgt offensichtlich $\cos t = \frac{3}{5}$. Andererseits folgt auch

$$\sin^2 t = 1 - \cos^2 t = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \implies \sin t \in \left\{-\frac{4}{5}, \frac{4}{5}\right\}.$$

Also erfüllt t die geforderte Bedingung. Für λ können wir offensichtlich 1 wählen.