Lineare Algebra für Physiker
12. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Matthias Schneider
Dr. Silke Horn
Dipl.-Math. Dominik Kremer

SS 2013
9./12. Juli 2013

Hinweis: Zur Klausurvorbereitung hat Prof. Schneider eine *Probeklausur* erstellt, die Sie separat herunterladen können. Die Bearbeitung dieser Probeklausur zählt in dieser Woche als *Hausübung* und hat somit Einfluss auf Ihren *Klausurbonus*. Bitte geben Sie sie wie gewohnt in der nächsten Woche bei Ihrem Übungsleiter ab.

Wir weisen außerdem darauf hin, dass wir nach Abschluss der Korrekturen die Ergebnisse der Hausübungen in der üblichen Zuordnung „*Matrikel-Nummer — Punktzahl — Bonus Ja/Nein*" veröffentlichen wollen. Sollten Sie damit nicht einverstanden sein, wenden Sie sich bitte an Dominik Kremer (kremer@mathematik.tu-darmstadt.de).

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Hauptachsentransformation)
Gegeben sei die Menge

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : 7x_1^2 + 24x_1x_2 = 1 \right\}.$$

(a) Finden Sie eine symmetrische Matrix A, so dass $Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : x^T A x = 1 \right\}$.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und eine Hauptachsentransformation von A.

(c) Skizzieren Sie Q.
Hinweis: Betrachten Sie $\mathbb{R}^2$ bezüglich einer Basis aus Hauptachsen von A.

Lösung:

(a) Wir stellen fest, dass

$$7x_1^2 + 24x_1x_2 = x^T \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 12 & 0 \end{pmatrix} x$$

für alle $x \in \mathbb{R}^2$. Die gesuchte Matrix ist also

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Wir bestimmen zunächst die Eigenwerte von A. Es gilt

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 7-\lambda & 12 \\ 12 & -\lambda \end{pmatrix} = (7-\lambda)(-\lambda) - 12^2 = \lambda^2 - 7\lambda - 144.$$

Die Eigenwerte von A sind daher $\lambda_1 = 16$ und $\lambda_2 = -9$. Als zugehörigen Eigenvektoren berechnet man

$$v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Diese beiden Vektoren haben die Norm 5, d. h. $w_1 = \frac{1}{5}v_1$, $w_2 = \frac{1}{5}v_2$ ist eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren. Die Hauptachsen von A sind folglich ebenfalls w_1 und w_2 und als Hauptachsentransformation ergibt sich

$$S = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

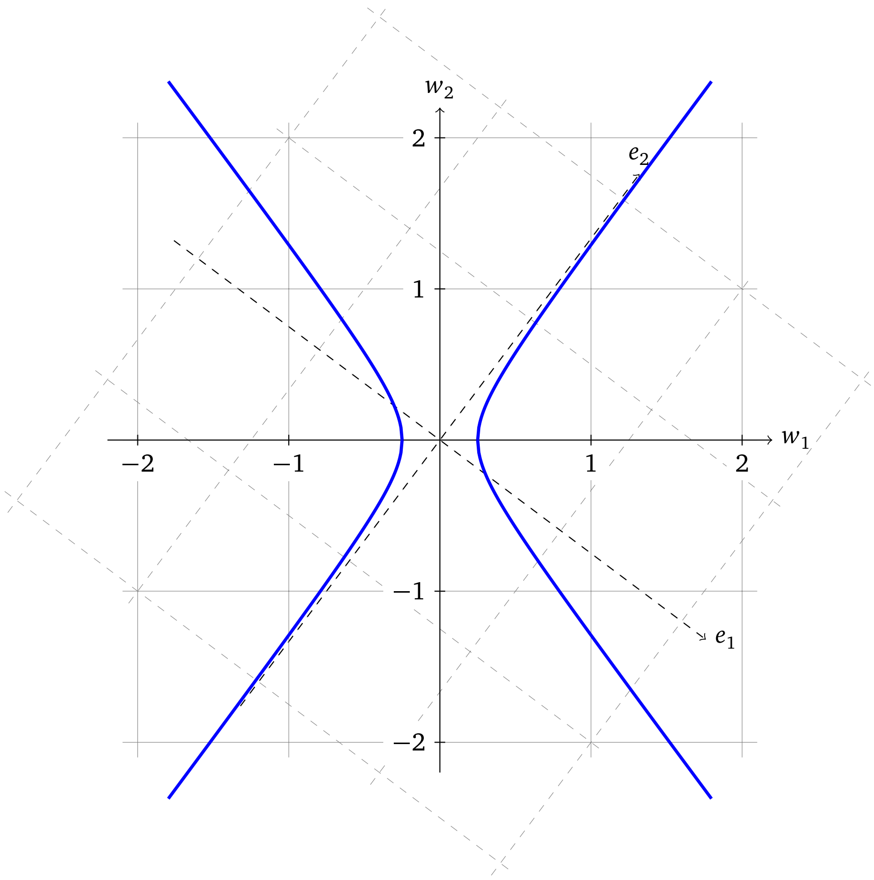
(c) An den Eigenwerten von A können wir direkt ablesen, dass Q unbeschränkt ist. Genauer handelt es sich um eine Hyperbel. Diese wollen wir nun bezüglich der Hauptachsenbasis $B = (w_1, w_2)$ skizzieren. Zunächst gilt für $x \in \mathbb{R}^2$

$$x \in Q \quad \Longleftrightarrow \quad 1 = x^T A x = \left(S^{-1}x\right)^T \cdot \left(S^{-1}AS\right) \cdot \left(S^{-1}x\right) = [x]_B^T \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix} [x]_B,$$

da die Hauptachsentransformation S orthogonal ist, also $S^{-1} = S^T$ erfüllt. Mit der Substitution $y = [x]_B$ erhalten wir daher

$$x \in Q \quad \Longleftrightarrow \quad 16y_1^2 - 9y_2^2 = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad y_2 = \pm\frac{1}{3}\sqrt{16y_1^2 - 1}.$$

Bezüglich der Basis (w_1, w_2) können wir Q nun leicht skizzieren:



Der Übergang zur Hauptachsenbasis entspricht übrigens einer Drehung um den Winkel $\alpha = \arccos(\frac{4}{5}) = \arcsin(\frac{3}{5})$. Eine Skizze bezüglich des Standardkoordinatensystems $e_1 = (1,0)^T$, $e_2 = (0,1)^T$ erhalten wir entsprechend durch Rotation unseres Bildes um den Winkel $-\alpha$. Um diesen Zusammenhang klar zu machen, ist das Standardkoordinatensystem (e_1, e_2) in der Skizze mit gestrichelten Linien eingezeichnet.

Aufgabe G2 (Definite Matrizen)

(a) Betrachten Sie die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -10 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 14 \end{pmatrix}.$$

Welche davon sind positiv definit? Welche sind negativ definit? Zeigen Sie jeweils ihre Aussagen.

(b) Gibt es nicht invertierbare positiv definite Matrizen? Zeigen Sie Ihre Aussage.

Lösung:

(a) Wir verwenden das Kriterium über Minoren aus der Vorlesung.

- Für A gilt
$$\det\left(A_1\right) = \det(3) = 3 > 0 \quad \text{und} \quad \det\left(A_2\right) = \det A = 12 - 9 = 3 > 0.$$
Also ist A positiv definit.
- Für B gilt
$$\det\left(B_1\right) = \det(-1) = -1 < 0 \quad \text{und} \quad \det\left(B_2\right) = \det B = 10 - 9 = 1 > 0.$$
Also ist B negativ definit.
- Für C gilt
$$\det\left(C_2\right) = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 4 - 4 = 0.$$
Also ist C weder positiv noch negativ definit.
- Für D gilt
$$\det\left(D_1\right) = \det(1) = 1 > 0, \quad \det\left(D_2\right) = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = 5 - 4 = 1 > 0 \quad \text{und} \quad \det\left(D_3\right) = \det A_4 = 1 > 0.$$
Also ist D positiv definit.

(b) Eine nicht invertierbare Matrix hat Determinante Null und damit einen Eigenwert Null. Es sind also nicht alle Eigenwerte größer als Null. Folglich kann eine solche Matrix nicht positiv definit sein.

Aufgabe G3 (Skalarprodukte in $\mathbb{R}^n$)
Wir wollen in dieser Aufgabe alle Skalarprodukte des Euklidischen Vektorraums $\mathbb{R}^n$ charakterisieren. Zeigen Sie hierzu Folgendes:

(a) Ist $A \in M_n(\mathbb{R})$ eine symmetrische, positiv definite Matrix, so definiert $\langle x, y\rangle = x^T A y$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$.

(b) Ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$, so gibt es eine symmetrische, positiv definite Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ mit $\langle x, y\rangle = x^T A y$.

Lösung:

(a) Wir rechnen einfach die Axiome nach:

Bilinearität folgt direkt aus der Linearität der Matrix-Vektor-Multiplikation.

Symmetrie folgt aus der Symmetrie von A, denn für $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt
$$\langle x, y\rangle = x^T A y \overset{\text{Skalar}}{=} (x^T A y)^T = y^T A^T x \overset{A \text{ symm.}}{=} y^T A x = \langle y, x\rangle.$$

Pos. Definitheit folgt aus der positiven Definitheit von A, denn
$$\langle x, x\rangle = x^T A x > 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

(b) Wir bezeichnen die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$ mit $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ und setzen $a_{ij} = \langle e_i, e_j\rangle$. Dann hat die Matrix $A = \left(a_{ij}\right)_{ij}$ die gewünschten Eigenschaften. Zunächst gilt nämlich für Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$:
$$\begin{aligned} \langle v, w\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n v_i e_i, \sum_{j=1}^n w_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n v_i \left\langle e_i, \sum_{j=1}^n w_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n v_i \left(\sum_{j=1}^n w_j \left\langle e_i, e_j \right\rangle \right) \\ &= \sum_{i=1}^n v_i \left(\sum_{j=1}^n w_j a_{ij} \right) = \sum_{i=1}^n v_i (Aw)_i = v^T A w. \end{aligned}$$

Weiterhin ist A symmetrisch, denn $a_{ij} = \left\langle e_i, e_j \right\rangle = \left\langle e_j, e_i \right\rangle = a_{ji}$. Schließlich ist A auch positiv definit, denn für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt $x^T A x = \langle x, x\rangle > 0$.

Aufgabe G4 (Hauptachsentransformation II)
Bestimmen Sie eine Hauptachsentransformation der Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Zunächst müssen wir die Eigenwerte von A berechnen. Hierfür bestimmen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$0 = \det(A - tE) = \det \begin{pmatrix} 1-t & -1 & 1 \\ -1 & -1-t & 1 \\ 1 & 1 & 1-t \end{pmatrix} = -t^3 + t^2 + 4t - 4.$$

Offensichtlich ist $t_1 = 1$ eine Nullstelle. Durch Polynomdivision ergibt sich

$$\begin{array}{l} \big(-t^3 + t^2 + 4t - 4\big) \big/ \big(t - 1\big) = -t^2 + 4 \\ \underline{\;\; t^3 - t^2 \;\;} \\ \qquad\quad 4t - 4 \\ \qquad\; \underline{-4t + 4} \\ \qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

Die beiden anderen Nullstellen sind also $t_2 = -2$ und $t_3 = 2$. Durch Lösen der linearen Gleichungssysteme $(A - t_i E)v_i = 0$ für $i = 1, 2, 3$ erhalten wir nun die normierterten Eigenvektoren

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Indem wir diese Eigenvektoren als Spalten einer Transformationsmatrix auffassen, erhalten wir schließlich die gesuchte Hauptachsentransformation

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{2} & 2 & 0 \\ -\sqrt{2} & -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$