Lineare Algebra für Physiker
11. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Matthias Schneider
Dr. Silke Horn
Dipl.-Math. Dominik Kremer

SS 2013
2./5. Juli 2013

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Minitest)

(a) Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

- ☐ Symmetrische Matrizen sind diagonalisierbar.
- ☐ Symmetrische Matrizen sind normal.
- ☐ Reelle symmetrische Matrizen sind normal.
- ☐ Selbstadjungierte Matrizen sind diagonalisierbar.
- ☐ Orthogonale Matrizen sind unitär.
- ☐ Unitäre Matrizen sind orthogonal.
- ☐ Das Produkt symmetrischer Matrizen ist symmetrisch.
- ☐ Hermitesche Matrizen sind selbstadjungiert.
- ☐ Selbstadjungierte Matrizen sind hermitesch.
- ☐ Es gibt normale Matrizen, die nicht diagonalisierbar sind.

(b) Entscheiden Sie bei den folgenden Matrizen, ob sie symmetrisch, unitär, orthogonal, hermitesch, selbstadjungiert, normal oder diagonalisierbar sind!

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_4 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$M_5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M_6 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \quad M_7 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \quad M_8 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:

(a) Die richtigen Antworten sind:

- ☐ Symmetrische Matrizen sind diagonalisierbar.
- ☐ Symmetrische Matrizen sind normal.
- ☒ Reelle symmetrische Matrizen sind normal.
- ☒ Selbstadjungierte Matrizen sind diagonalisierbar.
- ☒ Orthogonale Matrizen sind unitär.
- ☐ Unitäre Matrizen sind orthogonal.
- ☐ Das Produkt symmetrischer Matrizen ist symmetrisch.
- ☒ Hermitesche Matrizen sind selbstadjungiert.
- ☒ Selbstadjungierte Matrizen sind hermitesch.
- ☐ Es gibt normale Matrizen, die nicht diagonalisierbar sind.

(b) Die Klassifikation der Matrizen entspricht den Angaben der folgenden Tabelle:

Eigenschaft	Matrizen
symmetrisch	M_1, M_2, M_6, M_8
unitär	M_1, M_4, M_5, M_6, M_8
orthogonal	M_1, M_4, M_5
hermitesch = selbstadjungiert	M_1, M_2, M_7
normal	M_1, M_2, M_4, M_5, M_6, M_7, M_8
diagonalisierbar	M_1, M_2, M_4, M_5, M_6, M_7, M_8

Die ersten vier Eigenschaften lesen wir direkt aus den Matrizen ab. Da unitäre und hermitesche Matrizen normal sind, wissen wir bei allen Matrizen außer M_3, dass sie normal und somit diagonalisierbar sind. Umgekehrt rechnet man leicht nach, dass M_3 nur einen eindimensionalen Eigenraum zum einzigen Eigenwert 1 hat. Folglich ist M_3 nicht diagonalisierbar und somit auch nicht normal.

Aufgabe G2 (Adjungierter Operator)
Es sei $A\colon V \to V$ ein Endomorphismus des unitären Vektorraums V. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Kern}(A^*) = \mathrm{Bild}(A)^\perp$.

Lösung: Es gilt

$$x \in \mathrm{Kern}(A^*) \iff A^*x = 0 \iff \langle A^*x, y\rangle = 0 \text{ für alle } y \in V \iff \langle x, Ay\rangle = 0 \text{ für alle } y \in V \iff x \in \mathrm{Bild}(A)^\perp.$$

Aufgabe G3 (Dualraum)
Für einen $\mathbb{K}$-Vektorraum V bezeichnet $V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K})$ die Menge der linearen Abbildungen $V \to \mathbb{K}$. Bezüglich der folgenden Addition und skalaren Multiplikation hat V^* selbst die Struktur eines $\mathbb{K}$-Vektorraums:

$$\begin{aligned} +\colon V^* \times V^* \to V^*, \quad & (\varphi, \psi) \mapsto \varphi + \psi \qquad \text{mit} \qquad (\varphi + \psi)(w) = \varphi(w) + \psi(w), \\ \cdot\colon \mathbb{K} \times V^* \to V^*, \quad & (\lambda, \varphi) \mapsto \lambda\varphi \qquad\quad \text{mit} \qquad (\lambda\varphi)(w) \quad = \lambda\varphi(w). \end{aligned}$$

Der so konstruierte Vektorraum V^* heißt *Dualraum* von V. Wir nehmen im Folgenden an, dass V endlichdimensional und mit einem Skalarprodukt ausgestattet ist, und definieren die Abbildung

$$\varphi\colon V \to V^*, \quad v \mapsto \varphi_v \qquad \text{mit} \qquad \varphi_v(w) = \langle v, w\rangle.$$

Beweisen oder widerlegen Sie,

(a) dass φ eine lineare Abbildung ist,

(b) dass φ injektiv ist und

(c) dass φ surjektiv ist.

Was sagen Ihre Resultate über das Verhältnis von V und V^* aus?

Lösung:

(a) Für $v, v' \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt $\varphi(v + \lambda v') = \varphi(v) + \overline{\lambda}\varphi(v')$, denn für alle $w \in V$ ist

$$\varphi_{v+\lambda v'}(w) = \left\langle v + \lambda v', w\right\rangle = \langle v, w\rangle + \overline{\lambda}\left\langle v', w\right\rangle = \varphi_v(w) + \overline{\lambda}\varphi_{v'}(w) = \left(\varphi_v + \overline{\lambda}\varphi_{v'}\right)(w).$$

Also ist φ für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ linear, für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ jedoch nur antilinear. In beiden Fällen ist φ zumindest additiv.

(b) Wir nehmen an, dass $\varphi(v) = \varphi(v')$. Dann gilt für alle $w \in V$

$$0 = \varphi_v(w) - \varphi_{v'}(w) = \langle v, w\rangle - \langle v', w\rangle = \langle v - v', w\rangle.$$

Also steht $v - v'$ senkrecht auf allen Vektoren aus V und muss somit verschwinden.

(c) Wir konstruieren zu gegebenem $\psi \in V^*$ einen Vektor $v \in V$ mit $\varphi(v) = \psi$. Konkret setzen wir $v = \sum_{i=1}^n \psi(v_i)v_i$, wobei $v_1, \ldots, v_n$ eine Orthonormalbasis von V bezeichnet. Dann gilt für $j = 1, \ldots, n$

$$\varphi_v(v_j) = \left\langle v, v_j\right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \psi\left(v_i\right) v_i, v_j\right\rangle = \sum_{i=1}^n \psi\left(v_i\right)\left\langle v_i, v_j\right\rangle = \sum_{i=1}^n \psi\left(v_i\right)\delta_{ij} = \psi(v_j).$$

Die linearen Abbildungen φ_v und ψ nehmen also auf den Basisvektoren v_j jeweils die gleichen Werte an. Damit sind sie bereits gleich und es folgt wie gefordert $\varphi(v) = \psi$.

Insgesamt stellen wir fest, dass es eine kanonische antilineare Bijektion $\varphi\colon V \to V^*$, also eine stark strukturierte 1:1-Beziehung zwischen Vektoren in V und Vektoren in V^* gibt. Im reellen Fall sind V und V^* sogar kanonisch isomorph.

Aufgabe G4 (Verallgemeinerungen selbstadjungierter Matrizen)
Für $\lambda \in \mathbb{C}$ sei

$$V(\lambda,*) = \left\{A \in M_n(\mathbb{C}) : A^* = \lambda A\right\}.$$

(a) Bestimmen Sie alle $A \in V(\lambda,*)$ für $|\lambda| \neq 1$.

(b) Zeigen Sie: Für $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = 1$ gibt es ein $z = z(\lambda) \in \mathbb{C}$ mit $V(\lambda,*) = z \cdot V(1,*) = \{z \cdot A : A^* = A\}$.

(c) Bestimmen Sie ein mögliches $z = z(-1)$.

Lösung:

(a) Aus $A^* = \lambda A$ folgt, dass A normal ist. Somit gibt es nach dem Hauptsatz über normale Matrizen eine Orthonormalbasis $v_1, \ldots, v_n$ aus Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Ist ein Eigenwert ungleich 0, etwa $\lambda_1 \neq 0$, so folgt

$$\lambda\lambda_1 v_1 = \lambda A v_1 = A^* v_1 = \overline{\lambda_1} v_1,$$

also $\lambda = \overline{\lambda_1}/\lambda_1$ und insbesondere $|\lambda| = 1$. Für $|\lambda| \neq 1$ müssen also alle Eigenwerte von A gleich 0 sein, d. h. $A = 0$.

(b) Für $\lambda = e^{i\varphi}$ wählen wir $z = z(\lambda) = e^{-i\varphi/2}$. (Beachten Sie, dass es für gegebenes λ mehrere Wahlmöglichkeiten für φ gibt und dass somit auch $z(\lambda)$ nicht eindeutig festgelegt ist.) Ist nun $A \in V(1,*)$, so gilt

$$(zA)^* = e^{i\varphi/2} A^* = e^{i\varphi/2} A = e^{i\varphi}(zA) = \lambda(zA).$$

Also ist $z \cdot V(1,*) \subseteq V(\lambda,*)$. Umgekehrt erhalten wir für $B \in V(\lambda,*)$

$$(z^{-1}B)^* = e^{-i\varphi/2} B^* = e^{-i\varphi/2} \lambda B = e^{i\varphi/2} B = z^{-1} B.$$

Es gilt also auch $z \cdot V(1,*) \supseteq V(\lambda,*)$ und somit die geforderte Gleichheit.

(c) Mit der Formel aus (b) erhalten wir $z(-1) = z\left(e^{\pm i\pi}\right) = e^{\mp\pi/2} = \mp i$.

Hausübung

Aufgabe H1 (Hauptsatz über reelle symmetrische Matrizen) (6 Punkte)

(a) Zeigen Sie den Hauptsatz über reelle symmetrische Matrizen direkt. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

  i. Zeigen Sie, dass jede reelle symmetrische Matrix A einen reellen Eigenwert besitzt.

  ii. Zeigen Sie: Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein unter A invarianter Unterraum, dann ist auch $U^\perp$ ein A-invarianter Unterraum.

  iii. Zeigen Sie induktiv, dass es eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A in $\mathbb{R}^n$ gibt und folgern Sie den Hauptsatz.

(b) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie eine Diagonalmatrix D und eine orthogonale Matrix S, sodass $S^T A S = D$ gilt. Geben Sie beide Matrizen konkret an.

Lösung:

(a) i. Das charakteristische Polynom von A besitzt nach dem Hauptsatz der Algebra eine komplexe Nullstelle. Andererseits sind alle Eigenwerte von A reell, denn es gilt bezüglich des unitären Standardskalarprodukts

$$Av = \lambda v \quad \Longrightarrow \quad \lambda\langle v, v\rangle = \langle v, Av\rangle \overset{A=A^T=A^*}{=} \langle Av, v\rangle = \overline{\lambda}\langle v, v\rangle \quad \overset{\langle v,v\rangle>0}{\Longrightarrow} \quad \lambda = \overline{\lambda} \quad \Longrightarrow \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Der Eigenwert, der nach dem Hauptsatz der Algebra existiert, ist also ebenfalls reell.

ii. Sei $v \in U^\perp$, also $\langle u, v\rangle = 0$ für alle $u \in U$. Dann folgt

$$\langle u, Av\rangle \overset{A=A^T}{=} \langle \underbrace{Au}_{\in U}, \underbrace{v}_{\in U^\perp}\rangle = 0 \qquad \text{für alle } u \in U,$$

da U invariant unter A ist. Folglich ist $Av \in U^\perp$ und wir erhalten $AU^\perp \subseteq U^\perp$, was zu zeigen war.

iii. Induktionsanfang: Nach i. hat A einen reellen Eigenwert λ mit zugehörigem normierten Eigenvektor v_1.

Induktionsannahme: Es gibt ein Orthonormalsystem $(v_1, \dots, v_k)$ aus Eigenvektoren von A, wobei $1 \leq k < n$.

Induktionsschritt: Wir bezeichnen mit $U = \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_k\}$ das lineare Erzeugnis des Orthonormalsystems aus der Induktionsannahme. Es ist offensichtlich invariant unter A und somit ist nach ii. auch $U^\perp$ invariant unter A. Wir können die lineare Abbildung $x \mapsto Ax$ also auf $U^\perp$ einschränken und erhalten einen Endomorphismus $\varphi : U^\perp \to U^\perp$. Dieser ist selbstadjungiert, denn es gilt

$$\langle \varphi(v), w\rangle = \langle Av, w\rangle = \langle v, Aw\rangle = \langle v, \varphi(w)\rangle = \langle \varphi^*(v), w\rangle$$

für alle $v, w \in U^\perp$. Die Matrix von φ bezüglich einer beliebigen Basis von $U^\perp$ ist daher nicht nur reell, sondern auch symmetrisch. Sie hat also nach i. einen reellen Eigenwert mit zugehörigem normierten Eigenvektor $v_{k+1} \in U^\perp$. Dieser ist offensichtlich der gesuchte Eigenvektor von A.

Dieses Verfahren setzen wir fort, bis wir n normierte Eigenvektoren gefunden haben. Sie bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$, bezüglich der A Diagonalgestalt hat.

(b) Das charakteristische Polynom $p_A(t) = (t-1)^2(t-4)$ hat die Nullstellen 1 (mit Vielfachheit 2) und 4. Wir bestimmen jeweils linear unabhängige Eigenvektoren und normieren diese. Beispielsweise erhalten wir

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} \quad \text{zum EW 1,} \qquad v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \text{zum EW 4.}$$

Mit diesen Vektoren ergibt sich

$$S = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2}\\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2}\\ 0 & -2 & \sqrt{2}\end{pmatrix}, \qquad S^T = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0\\ 1 & 1 & -2\\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2}\end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

Aufgabe H2 (Adjungierte der Ableitung) (6 Punkte)

Sei $\mathscr{P}_2 = \left\{a_2x^2 + a_1x + a_0 : a_i \in \mathbb{R}\right\}$ der Vektorraum der rellen Polynome von Grad ≤ 2 mit dem Skalarprodukt

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,\mathrm{d}x.$$

Berechnen Sie die Adjungierte φ^* des Ableitungsoperators $\varphi(p) = p'$.

Lösung: *(Variante 1)* Wir konstruieren zunächst eine Orthonormalbasis $\mathscr{B}_{ON}$ von $\mathscr{P}_2$. Hierfür wenden wir das Gram-Schmidt-Verfahren auf die Basis $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$ mit den Vektoren $v_1 = 1$, $v_2 = x$, $v_3 = x^2$ an:

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_1 &= v_1 = 1 && \Longrightarrow u_1 = \frac{\tilde{u}_1}{|\tilde{u}_1|} = \sqrt{\frac{1}{2}},\\
\tilde{u}_2 &= v_2 - \langle u_1, v_2\rangle u_1 = v_2 - 0u_1 = x && \Longrightarrow u_2 = \frac{\tilde{u}_2}{|u_2|} = \sqrt{\frac{3}{2}}x,\\
\tilde{u}_3 &= v_3 - \langle u_1, v_3\rangle u_1 - \langle u_2, v_3\rangle u_2 = v_3 - \frac{\sqrt{2}}{3}u_1 - 0u_2 = x^2 - \frac{1}{3} && \Longrightarrow u_3 = \frac{\tilde{u}_3}{|u_3|} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}x^2 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}.
\end{aligned}$$

Also ist $\mathscr{B}_{ON} = (u_1, u_2, u_3)$. Die Bilder der Basisvektoren unter φ sind nun

$$\varphi(u_1) = 0, \qquad \varphi(u_2) = \sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{3}u_1, \qquad \varphi(u_3) = 3\sqrt{\frac{5}{2}}x = \sqrt{15}u_2$$

und die Matrix von φ bezüglich $\mathscr{B}_{ON}$ ist somit gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{15} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da wir $\mathscr{B}_{ON}$ als Orthonormalbasis konstruiert haben, ist

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{15} & 0 \end{pmatrix}$$

die Matrix von φ^* bezüglich $\mathscr{B}_{ON}$. Um daraus die Matrix von φ^* bezüglich $\mathscr{B}$ zu erhalten, benötigen wir noch die Transformationsmatriz

$$S = {}_{\mathscr{B}}\mathrm{id}_{\mathscr{B}_{ON}} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}} \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{10} \\ 0 & 2\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 3\sqrt{10} \end{pmatrix}$$

und ihre Inverse

$$S^{-1} = {}_{\mathscr{B}_{ON}}\mathrm{id}_{\mathscr{B}} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 15\sqrt{2} & 0 & 5\sqrt{2} \\ 0 & 5\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{10} \end{pmatrix}.$$

Somit erhalten wir schließlich die Matrix von φ^* bezüglich $\mathscr{B}$ als

$$SA^*S^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{10} \\ 0 & 2\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 3\sqrt{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{15} & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 15\sqrt{2} & 0 & 5\sqrt{2} \\ 0 & 5\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{15}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt also

$$\varphi^*\left(a + bx + cx^2\right) = -\frac{5}{2}b + (3a + c)x + \frac{15}{2}bx^2.$$

Lösung: *(Variante 2)* Bezüglich der Basis $\mathscr{B} = \{1, x, x^2\}$ hat φ die Matrix

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

denn $\varphi(1) = 0$, $\varphi(x) = 1$ und $\varphi(x^2) = 2x$. Das Skalarprodukt können wir durch $\langle p, q\rangle = [p]_{\mathscr{B}}^T \cdot A \cdot [q]_{\mathscr{B}}$ mit Hilfe der Matrix

$$A = \frac{2}{15}\begin{pmatrix} 15 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

beschreiben. Um die Einträge von A zu bestimmen, haben wir hierbei sukzessive die Skalarprodukte $\langle 1, 1\rangle$, $\langle 1, X\rangle$, ..., $\langle X^2, X^2\rangle$ berechnet. Gesucht ist nun die Adjungierte φ^* von φ mit Matrixdarstellung D^* bezüglich $\mathscr{B}$. Es gilt für alle $p, q \in \mathscr{P}_2$

$$[p]_{\mathscr{B}}^T D^T A[q]_{\mathscr{B}} = \left(D[p]_{\mathscr{B}}\right)^T A[q]_{\mathscr{B}} = \langle \varphi(p), q\rangle = \langle p, \varphi^*(q)\rangle = [p]_{\mathscr{B}}^T AD^*[q]_{\mathscr{B}},$$

und somit $D^T A = AD^*$, bzw.

$$D^* = A^{-1}D^T A = \frac{3}{8}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{2}{15}\begin{pmatrix} 15 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \\ 0 & 15 & 0 \end{pmatrix}.$$

Folglich ist die Adjungierte φ^* gegeben durch

$$\varphi^*\left(a_2x^2 + a_1x + a_0\right) = \frac{15}{2}a_1x^2 + \left(a_2 + 3a_0\right)x - \frac{5}{2}a_1.$$

Aufgabe H3 (Simultane Diagonalisierung) (6 Punkte)
Wir betrachten einen endlichdimensionalen unitären Vektorraum V mit normalen Endomorphismen $\varphi_1, \dots, \varphi_m$.

- Die φ_i *kommutieren paarweise*, wenn $\varphi_i \circ \varphi_j = \varphi_j \circ \varphi_i$ für alle i, j gilt.
- Die φ_i sind *simultan diagonalisierbar*, falls eine Basis $\mathscr{B}$ aus *simultanen Eigenvektoren* existiert. Das bedeutet, dass alle φ_i bezüglich $\mathscr{B}$ Diagonalgestalt haben, bzw. dass jedes Element von $\mathscr{B}$ Eigenvektor von jedem φ_i ist.

Zeigen Sie, dass die φ_i genau dann paarweise kommutieren, wenn sie simultan diagonalisierbar sind.

Tipp: Gehen Sie bei der Hinrichtung induktiv vor. Die folgende Aussage (Übung 10, Aufgabe G1b) ist dabei wichtig: *„Kommutieren φ_i und φ_j, so ist jeder Eigenraum V' von φ_i invariant unter φ_j, d. h. $\varphi_j(V') \subseteq V'$."*

Lösung:

$\Rightarrow$) Wir nehmen an, dass die φ_i paarweise kommutieren, und zeigen die simultane Diagonalisierbarkeit durch Induktion nach m. Für $m = 0$ ist es ausreichend, eine beliebige Basis $\mathscr{B}$ von V zu wählen. Wir nehmen also an, dass m paarweise kommutierende Endomorphismen stets auch simultan diagonalisierbar sind. Daraus wollen wir folgern, dass auch $m + 1$ paarweise kommutierende Endomorphismen $\varphi_1, \dots, \varphi_{m+1}$ simultan diagonalisierbar sind.

Zunächst stellen wir fest, dass φ_{m+1} nach dem Hauptsatz über normale Endomorphismen diagonalisierbar ist. Es gibt also paarweise verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ von φ_{m+1}, so dass V in die direkte Summe der zugehörigen Eigenräume V_j, $j = 1, \dots, k$ zerfällt. Folglich genügt es zu zeigen, dass jedes V_j eine Basis aus simultanen Eigenvektoren hat. Wir werden dies o. B. d. A. für $j = 1$ tun.

Nach dem Tipp ist V_1 invariant unter allen φ_i. Diese lassen sich also zu Endomorphismen $\varphi_i : V_1 \to V_1$ einschränken. Nach der Induktionsannahme gibt daher eine Basis $\mathscr{B}_1$ von V_1, die aus simultanen Eigenvektoren von $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ besteht. Da jedoch jeder Vektor in V_1 nach Definition auch Eigenvektor von φ_{m+1} ist, besteht $\mathscr{B}_1$ sogar aus simultanen Eigenvektoren von $\varphi_1, \dots, \varphi_{m+1}$.

$\Leftarrow$) Wir nehmen an, dass $\mathscr{B}$ eine Basis von V ist, die aus simultanen Eigenvektoren der φ_i besteht. Die Matrizen $A_i = {}_{\mathscr{B}}[\varphi_i]_{\mathscr{B}}$ sind dann allesamt diagonal; insbesondere kommutieren sie paarweise. Dies überträgt sich auch auf die Endomorphismen, denn es gilt

$$ {}_{\mathscr{B}}[\varphi_i \circ \varphi_j]_{\mathscr{B}} = A_i A_j = A_j A_i = {}_{\mathscr{B}} [\varphi_j \circ \varphi_i]_{\mathscr{B}}. $$

Anmerkung: Es ist sehr leicht, bei der Hinrichtung sogar eine Orthonormalbasis aus simultanen Eigenvektoren zu konstruieren. Wer die Aufgabe noch etwas vertiefen möchte, sollte sich dies klar machen.