Lineare Algebra für Physiker
10. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Matthias Schneider
Dr. Silke Horn
Dipl.-Math. Dominik Kremer

SS 2013
25./28. Juni 2013

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Invariante Eigenräume)
Es seien $f, g : V \to V$ lineare Abbildungen.

(a) Zeigen Sie: Die Eigenräume von f^n sind f-invariant.

(b) Es gelte

$$f \circ g = g \circ f.$$

Zeigen Sie: Die Eigenräume von g sind f-invariant.

Hinweis: Ein Untervektorraum U von V heißt f-invariant, wenn $f(U) \subseteq U$ gilt.

Lösung:

(a) Sei U_λ der Eigenraum von f^n zu einem Eigenwert λ. Dann gilt für alle $v \in U_\lambda$

$$f^n(v) = \lambda v \quad \Rightarrow \quad f^n\left(f(v)\right) = f^{n+1}(v) = f\left(f^n(v)\right) = f(\lambda v) = \lambda f(v).$$

Also ist auch $f(v) \in U_\lambda$ und es folgt

$$f(U_\lambda) \subseteq U_\lambda.$$

(b) Sei U_λ der Eigenraum von g zu einem Eigenwert λ. Dann gilt für alle $v \in U_\lambda$

$$g(v) = \lambda v \quad \Rightarrow \quad g\left(f(v)\right) = f\left(g(v)\right) = f(\lambda v) = \lambda f(v).$$

Also ist auch $f(v) \in U_\lambda$ und es folgt

$$f(U_\lambda) \subseteq U_\lambda.$$

Aufgabe G2 (Eigenwerte)
Bestimmen Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren der $n \times n$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

deren Einträge alle Eins sind.

Lösung: Ein Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert n ist offensichtlich $x_0 := (1, 1, \dots, 1)^T$. Außerdem hat die Matrix A offensichtlich den Rang 1 und somit einen $(n-1)$-dimensionalen Kern. Zum Eigenwert 0 gibt es deshalb $n-1$ linear unabhängig Eigenvektoren. Man rechnet leicht nach, dass z. B. die Vektoren

$$x_1 = (1, -1, 0, \dots)^T, \quad x_2 = (0, 1, -1, 0, \dots)^T, \quad \dots, \quad x_{n-1} = (0, \dots, 0, 1, -1)^T$$

eine solche Familie bilden. Folglich hat A hat die Eigenwerte n und 0 und die zugehörigen Eigenräume sind

$$\operatorname{span}\left(x_0\right) \quad \text{und} \quad \operatorname{span}\left(x_1, \dots, x_{n-1}\right).$$

Aufgabe G3 (Polynomdivision)

(a) Bestimmen Sie die Vielfachheiten der Nullstellen des Polynoms

$$p(x) = x^5 - 8x^4 + 24x^3 - 34x^2 + 23x - 6,$$

indem Sie es durch $q(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ teilen.

(b) Bestimmen Sie die Vielfachheit der Nullstelle $x_0 = 1$ des Polynoms $p_9(x) = x^9 - 1$. Können Sie die Vielfachheit dieser Nullstelle auch für das allgemeinere Polynom $p_n(x) = x^n - 1$ mit $n \in \mathbb{N}$ angeben?

Lösung:

(a) Durch Ausmultiplizieren rechnet man leicht nach, dass $q(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. Mit Hilfe von Polynomdivision ergibt sich nun:

$$\begin{array}{l}
\big(\;\; x^5 - 8x^4 + 24x^3 - 34x^2 + 23x - 6\big) \big/ \big(x^3 - 6x^2 + 11x - 6\big) = x^2 - 2x + 1 \\
\underline{-x^5 + 6x^4 - 11x^3 \;\; + 6x^2} \\
\qquad -2x^4 + 13x^3 - 28x^2 + 23x \\
\qquad\;\; \underline{2x^4 - 12x^3 + 22x^2 - 12x} \\
\qquad\qquad\qquad x^3 \;\; - 6x^2 + 11x - 6 \\
\qquad\qquad\quad \underline{-x^3 \;\; + 6x^2 - 11x + 6} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Also gilt $p(x) = (x^2 - 2x + 1) \cdot q(x) = (x-1)^3(x-2)(x-3)$. Also hat p die Nullstellen 1 (mit Vielfachheit 3), 2 (mit Vielfachheit 1) und 3 (ebenfalls mit Vielfachheit 1).

(b) Um die Vielfachheit der Nullstelle $x_0 = 1$ von p_9 zu ermitteln, teilen wir p_9 durch den Linearfaktor $x - 1$:

$$\begin{array}{l}
\big(\;\; x^9 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - 1\big) \big/ \big(x - 1\big) = x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \\
\underline{-x^9 + x^8} \\
\qquad\quad x^8 \\
\quad\;\; \underline{-x^8 + x^7} \\
\qquad\qquad x^7 \\
\qquad\;\; \underline{-x^7 + x^6} \\
\qquad\qquad\quad x^6 \\
\qquad\quad \underline{-x^6 + x^5} \\
\qquad\qquad\qquad x^5 \\
\qquad\qquad \underline{-x^5 + x^4} \\
\qquad\qquad\qquad\quad x^4 \\
\qquad\qquad\;\; \underline{-x^4 + x^3} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad x^3 \\
\qquad\qquad\quad \underline{-x^3 + x^2} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x^2 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-x^2 + x} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\;\; x - 1 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\; \underline{-x + 1} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\;\; 0
\end{array}$$

Offensichtlich ist $x_0 = 1$ keine Nullstelle des Quotienten, also eine *einfache* Nullstelle von p_9.

Man sieht leicht, was die Polynomdivision im allgemeineren Fall ergibt: Dann gilt $p_n(x)/(x-1) = \sum_{i=0}^{n-1} x^i$. (Dies lässt sich auch durch Multiplikation mit $x - 1$ und anschließendem Auflösen der Teleskopsumme zeigen.) Insbesondere ist $x_0 = 1$ also keine Nullstelle des Quotienten und somit wiederum eine *einfache* Nullstelle von p_n.

Aufgabe G4 (Eigenvektoren anschaulich)

Wir betrachten eine Gerade g und eine Ebene E in $\mathbb{R}^3$, die $g \cap E = \{0\}$ erfüllen. Bestimmen Sie die reellen Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren der folgenden Abbildungen und entscheiden Sie jeweils, ob eine Basis aus Eigenvektoren existiert:

(a) Punktspiegelung am Ursprung
(b) 180° Drehung um g
(c) 90° Drehung um g
(d) Parallelprojektion längs g auf E
(e) Parallelprojektion längs E auf g

Hinweis: Zerfällt ein Vektorraum V in die direkte Summe zweier Untervektorräume V_1 und V_2, so bezeichnet man die Abbildung

$$V = V_1 \oplus V_2 \to V_1, \quad v_1 + v_2 \mapsto v_1$$

als *Parallelprojektion längs V_2 auf V_1*.

Lösung:

(a) Die Punktspiegelung am Ursprung hat nur den Eigenwert -1. Offensichtlich ist jeder Vektor in $\mathbb{R}^3$ Eigenvektor zu diesem Eigenwert und somit besteht auch jede Basis aus Eigenvektoren.
(b) Die 180° Drehung um g hat die Eigenwerte 1 und -1. Eigenvektoren zum Eigenwert 1 sind alle Vektoren in der Drehachse g, Eigenvektoren zum Eigenwert -1 sind alle Vektoren, die senkrecht auf g stehen. Folglich gibt es eine Basis aus Eigenvektoren.
(c) Die 90° Drehung um g hat nur den Eigenwert 1. Der zugehörige Eigenraum entspricht wieder der Drehachse g, es gibt dieses mal aber keine Basis aus Eigenvektoren.
(d) Die Parallelprojektion längs g auf E hat die Eigenwerte 1 und 0. Eigenvektoren zum Eigenwert 1 sind alle Vektoren im Bild der Projektion, also in E. Eigenvektoren zum Eigenwert 0 sind alle Vektoren im Kern der Projektion, also in g. Folglich gibt es eine Basis aus Eigenvektoren.
(e) Die Parallelprojektion längs E auf g hat die Eigenwerte 1 und 0. Eigenvektoren zum Eigenwert 1 sind alle Vektoren im Bild der Projektion, also in g. Eigenvektoren zum Eigenwert 0 sind alle Vektoren im Kern der Projektion, also in E. Folglich gibt es eine Basis aus Eigenvektoren.

Hausübung

Aufgabe H1 (Nilpotente Matrizen) (6 Punkte)

Wir betrachten eine komplexe $n \times n$-Matrix A mit charakteristischem Polynom p_A. Zeigen Sie:

(a) Ist A nilpotent (gilt also $A^d = 0$ für ein $d \in \mathbb{N}$), so ist

$$p_A(t) = (-1)^n t^n.$$

(b) Aus $(A - \lambda E_n)^d = 0$ für einen Wert $\lambda \in \mathbb{C}$ folgt

$$p_A(t) = (\lambda - t)^n.$$

Lösung:

(a) Durch Trigonalisierung finden wir eine obere Dreiecksmatrix B, die ähnlich ist zu A. Wäre der i-te Diagonaleintrag b_{ii} von B von Null verschieden, so wäre auch $B^d e_i$ für alle $d \in \mathbb{N}$ von Null verschieden. Aufgrund der Nilpotenz von A und B folgt also $b_{ii} = 0$ für $i = 1, \ldots, n$ und B ist sogar eine strikt obere Dreiecksmatrix. Da das charakteristische Polynom invariant ist unter Basiswechsel erhalten wir somit

$$p_A(t) = p_B(t) = \det(B - tE) = \det \begin{pmatrix} -t & * & \dots & * \\ & -t & \dots & * \\ & & \ddots & * \\ & & & -t \end{pmatrix} = (-1)^n t^n.$$

(b) Wie in (a) finden wir eine obere Dreiecksmatrix B, die ähnlich ist zu A. Da $B - \lambda E_n$ nilpotent ist, müssen die Diagonaleinträge von B dieses mal jedoch jeweils λ entsprechen. Somit folgt

$$p_A(t) = p_B(t) = \det(B - tE) = \det \begin{pmatrix} \lambda - t & * & \dots & * \\ & \lambda - t & \dots & * \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda - t \end{pmatrix} = (\lambda - t)^n.$$

Aufgabe H2 (Regeln für Eigenwerte) (6 Punkte)

Es sei V ein Vektorraum und $\varphi\colon V \to V$ ein Endomorphismus.

(a) Wir nehmen an, dass $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$ den Eigenwert 1 hat und dass $v \in V$ ein zugehöriger Eigenvektor von φ^2, aber kein Eigenvektor von φ ist. Zeigen Sie, dass φ dann die Eigenwerte 1 und -1 hat.

(b) Wir nehmen an, dass -1 ein Eigenwert von $\varphi^2 + \varphi$ ist. Zeigen Sie, dass φ^3 dann den Eigenwert 1 hat.

Lösung:

(a) Wir betrachten die Vektoren $w_+ = v + \varphi(v)$ und $w_- = v - \varphi(v)$. Weil v kein Eigenvektor von φ ist, sind w_+ und w_- von Null verschieden. Weiterhin gilt

$$\varphi\left(w_+\right) = \varphi(v) + \varphi^2(v) = \varphi(v) + v = w_+, \quad \text{und} \quad \varphi\left(w_-\right) = \varphi(v) - \varphi^2(v) = \varphi(v) - v = -w_-,$$

d. h. w_+ bzw. w_- sind Eigenvektoren von φ zum Eigenwert 1 bzw. -1.

(b) Sei $0 \neq v \in V$ ein Eigenvektor von $\varphi^2 + \varphi$ zum Eigenwert -1. Dann gilt $\varphi^2(v) + \varphi(v) + v = 0$ und somit

$$0 = \varphi\left(\varphi^2(v) + \varphi(v) + v\right) = \varphi^3(v) + \varphi^2(v) + \varphi(v) = \varphi^3(v) - v,$$

d. h. v ist ein Eigenvektor von φ^3 zum Eigenwert 1.

Aufgabe H3 (Geometrische und algebraische Vielfachheit) (6 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

und jeweils die zugehörige geometrische und algebraische Vielfachheit.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und jeweils die zugehörige geometrische und algebraische Vielfachheit.

Lösung:

(a) Offensichtlich ist das charakteristische Polynom der Matrix B

$$\det\left(B - \lambda E_3\right) = (1-\lambda)(3-\lambda)(6-\lambda)\,.$$

Die Eigenwerte sind also $1, 3$ und 6 und sie haben die algebraische Vielfachheit eins. Da die Eigenwerte zu verschiedenen Eigenvektoren linear unabhängig sind, es zu jedem Eigenwert mindestens einen Eigenvektor gibt und es in $\mathbb{R}^3$ nicht mehr als drei linear unabhängige Vektoren gibt, ist die Dimension der Eigenräume eins. D. h. die geometrische Vielfachheit jedes Eigenvektors von B ist eins. Alternativ kann man zur Bestimmung der geometrischen Vielfachheiten verwenden, dass

$$\dim V_\lambda = \dim \operatorname{Kern}(A - \lambda E) = \dim V - \operatorname{Rang}(A - \lambda E) = 3 - \operatorname{Rang}(A - \lambda E)$$

gilt. Diese Dimension lässt sich also über den Rang der Matrix $A - \lambda E$ bestimmen. Als weitere Alternative könnte man die Eigenräume direkt ausrechnen und ihre Dimension bestimmen.

(b) Das charakteristische Polynom lautet

$$\det\left(A - \lambda E_3\right) = (1-\lambda)^2(2-\lambda).$$

Die Eigenwerte sind also $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$ mit den algebraischen Vielfachheiten 2 beziehungsweise 1. Für die geometrischen Vielfachheiten bestimmen wir die Dimensionen von V_{λ_1} und V_{λ_2}:

$$\dim V_{\lambda_1} = \dim \operatorname{Kern}(C - E) = 3 - \operatorname{Rang}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 - \operatorname{Rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1$$

$$\dim V_{\lambda_2} = \dim \operatorname{Kern}(C - 2E) = 3 - \operatorname{Rang}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 - \operatorname{Rang}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1.$$

Wir sehen also, dass beide Eigenwerte die geometrische Vielfachheit 1 haben.