Lineare Algebra für Physiker
1. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Matthias Schneider
Dr. Silke Horn
Dipl. Math. Dominik Kremer

SS 2013
22./26. April 2013

Gruppenübung

Aufgabe G1
Entscheiden Sie, welche Aussagen über die natürlichen Zahlen wahr sind.

(a) $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq n$

(b) $\exists n \in \mathbb{N} : 3 \leq n$

(c) $\forall n \in \mathbb{N} : 3 \leq n$

(d) $\forall n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N} : k = 2n$

(e) $\exists n \in \mathbb{N} : \forall k \in \mathbb{N} : k = 2n$

(f) $\forall k \in \mathbb{N} : \exists n \in \mathbb{N} : k = 2n$

Begründen Sie Ihre Antworten.

Lösung: (a), (b) und (d) sind wahr.

Aufgabe G2
Zeigen Sie:

$$\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\left(\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix}\right) = \mathbb{C}^2.$$

Hinweis: Lösen Sie ein geeignetes Gleichungssystem.

Lösung: Wir müssen zeigen, dass das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & iy & = & a & & (I) \\ ix & + & y & = & b & & (II) \end{array}$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}$ eine Lösung hat.

Es gilt $(I) + i(II) : 2iy = a + bi$ und somit $y = \frac{a+bi}{2i}$. Einsetzen liefert $x = a - iy = \frac{a-bi}{2}$.

Aufgabe G3

(a) Zeigen Sie, dass die Inversionsformel

$$(a + bi)^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2} i$$

für komplexe Zahlen korrekt ist.

(b) Berechnen Sie $\frac{5-3i}{3+2i}$.

(c) Bestimmen Sie $(2 - i) \cdot (2 - 2i)$ geometrisch.

(d) Sei $c = a + bi$ eine komplexe Zahl. Berechnen Sie $(x - c)(x - \bar{c})$. Können Sie eine Lösung von $x^2 - 2x + 2 = 0$ raten?

Lösung:

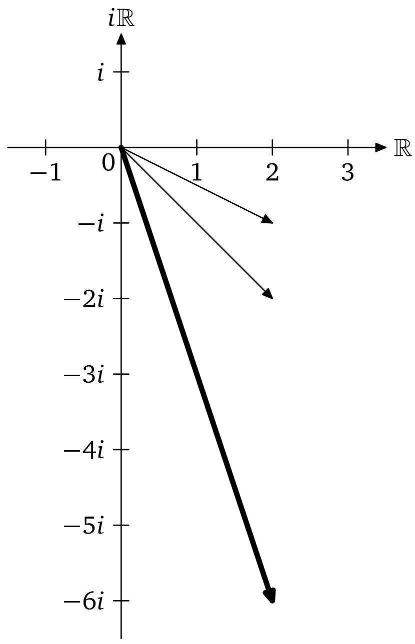
(a)

$$\begin{aligned}(a+bi)(a+bi)^{-1} &= (a+bi)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{-b}{a^2+b^2}i\right)\\ &= a\frac{a}{a^2+b^2}+a\frac{-b}{a^2+b^2}i+bi\frac{a}{a^2+b^2}+b\frac{-b}{a^2+b^2}i^2\\ &= \frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2}=1\end{aligned}$$

(b)

$$\frac{5-3i}{3+2i}=(5-3i)(3+2i)^{-1}=(5-3i)\frac{3-2i}{3^2+2^2}=\frac{9-19i}{13}.$$

(c) We see that $2-2i$ encloses an angle of $45°$ with the real line. So multiplying with $2-2i$ is a rotation about $45°$ clockwise and a dilation of $|2-2i|=\sqrt{8}\approx 2.8$. So we get:



(d)

$$(x-c)(x-\bar{c})=x^2-(c+\bar{c})x+c\bar{c}=x^2-2ax+(a^2+b^2).$$

If $a=b=1$ this turns into x^2-2x+2 which hence has the solutions $1+i$ and $1-i$.

Aufgabe G4

Betrachten Sie folgende Rechnung:

$$-1=\sqrt{-1}\sqrt{-1}=\sqrt{(-1)(-1)}=\sqrt{1}=1\,.$$

Was ist hier passiert?

Lösung: Durch die Ordnung auf $\mathbb{R}$ gibt es eine Möglichkeit, die Wurzeln positiver Zahlen zu normieren. Obwohl es in den komplexen Zahlen für jede Zahl (insbesondere für negative reelle Zahlen) Wurzeln gibt, zeigt die Rechnung, dass es keine Möglichkeit gibt, die Wurzelfunktion *multiplikativ* auf die negativen komplexen Zahlen fortzusetzen.

Aufgabe G5

Es sei $V=\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}\}$ die Menge der reellen Zahlenfolgen.

(a) Zeigen Sie: V bildet mit den Operationen

$$\begin{aligned}+ : V\times V\to V, &\qquad \big((a_n)_{n\in\mathbb{N}},(b_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)\mapsto(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ und}\\ \cdot : \mathbb{R}\times V\to V, &\qquad \big(\lambda,(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)\mapsto(\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}}\end{aligned}$$

einen $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(b) Ist die Teilmenge $U_1 := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \,|\, (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V,$ endlich viele der a_n sind ungleich Null $\}$ ein Untervektorraum von V? Zeigen Sie ihre Aussage.

(c) Ist die Teilmenge $U_2 := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \,|\, (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V,$ endlich viele der a_n sind gleich Null $\}$ ein Untervektorraum von V? Zeigen Sie ihre Aussage.

Lösung:

(a) Zunächst rechnet man nach, dass $(V,+)$ eine abelsche Gruppe ist. Wir bezeichnen dabei mit 0 die konstante Nullfolge. Mit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, c = (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V$ gilt

$$\begin{aligned}
a+b &= (a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (b_n+a_n)_{n\in\mathbb{N}} = b+a \\
(a+b)+c &= ((a_n+b_n)+c_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n+(b_n+c_n))_{n\in\mathbb{N}} = a+(b+c) \\
0+a &= (0+a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = a \\
a+(-a) &= (a_n+(-a_n))_{n\in\mathbb{N}} = 0
\end{aligned}$$

Mit $\alpha,\beta \in \mathbb{R}, a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V$ gilt weiter für die Skalarmultiplikation

$$\begin{aligned}
\alpha(\beta a) &= (\alpha(\beta a_n))_{n\in\mathbb{N}} = ((\alpha\beta)a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\alpha\beta)a \\
\alpha(a+b) &= (\alpha(a_n+b_n))_{n\in\mathbb{N}} = \alpha(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + \alpha(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = \alpha a + \alpha b \\
(\alpha+\beta)a &= ((\alpha+\beta)a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \alpha(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + \beta(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \alpha a + \beta a \\
1\cdot a &= (1\cdot a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = a.
\end{aligned}$$

Somit ist gezeigt, dass V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

(b) Offensichtlich ist die Nullfolge ein Element von U_1.

Addiert man zwei Zahlenfolgen aus U_1, so hat die Summe dieser beiden auch nur endlich viele Folgenglieder ungleich Null, ist also wieder in U_1.

Multipliziert man eine Zahlenfolge (a_n) aus U_1 mit einem $\lambda \in \mathbb{R}$, so ist $\lambda a_n = 0$ genau dann wenn $a_n = 0$ ist. D.h. die Zahlenfolge $(\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat ebenfalls endlich viele von Null verschiedene Folgenglieder, liegt also in U_1.

Zusammen heißt das: U_1 ist ein Untervektorraum von V.

(c) Da die Nullfolge nicht in U_2 enthalten ist, ist U_2 kein Untervektorraum.

Hausübung

Aufgabe H1 (6 Punkte)
Zeigen Sie: Der Schnitt zweier Unterräume ist wieder ein Unterraum.

Lösung: Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Seien $U,W \subseteq V$ Unterräume von V. Wir müssen zeigen, dass $U\cap W$ abgeschlossen ist unter Addition und Skalarmultiplikation. Seien $u,v \in U\cap W$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann gilt, da U und W Unterräume sind, $u+v \in U, u+v \in W$ und somit $u+v \in U\cap W$. Genauso folgt $\lambda u \in U \cap W$.

Aufgabe H2 (6 Punkte)

(a) Betrachten Sie folgende komplexe Zahlen:

$$z_1 = 3+4i, \qquad z_2 = -2+i, \qquad z_3 = 7-i.$$

Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil von z_1+z_3, z_1z_2 und $\frac{z_1}{z_2}$.

(b) Sei $z\in\mathbb{C}$ und $n\in\mathbb{N}$. Eine Zahl $r\in\mathbb{C}$ heißt *Quadratwurzel* von z, falls $r^2=z$ gilt.

Bestimmen Sie alle Quadratwurzeln von -1, von i und von $3+4i$.

(c) Schreiben Sie folgende komplexe Zahlen in der Form $a+ib$ mit $a,b\in\mathbb{R}$.

$$i^{123456789}, \qquad \sum_{k=1}^{13823807582365} i^k$$

Lösung:

(a) Es gilt

$$\begin{array}{lllllllll} c_1 & = & z_1+z_3 & = & (3+4i)+(7-i) & = & 10+3i & & \\ c_2 & = & z_1 z_2 & = & (3+4i)(-2+i) & = & -6+3i-8i-4 & = & -10-5i \\ c_3 & = & \frac{z_1}{z_2} & = & \frac{3+4i}{-2+i} & = & \frac{(3+4i)(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)} & & \\ & & & = & \frac{-6-3i-8i+4}{4+1} & = & -\frac{2}{5}-\frac{11}{5}i & & \end{array}$$

(b) Für $z=-1$: Sei $r=a+ib$ eine Quadratwurzel von -1. Dann gilt $-1=(a+ib)^2=a^2-b^2+2iab$. Aus Vergleich von Real- und Imaginärteil $a^2-b^2=-1$ und $ab=0$. Es muss also $a=0$ oder $b=0$ gelte und gleichzeitig $a^2-b^2<0$. Es folgt $a=0$ und damit $b^2=1$, d.h. $b=1$ oder $b=-1$. Also sind $r_1=i$ und $r_2=-i$ die einzigen Quadratwurzeln von $z=-1$.

Für $z=i$ ergibt sich auf ähnlichem Weg, dass $r_1=\frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i)$ und $r_2=\frac{1}{2}\sqrt{2}(-1-i)$ die einzigen Quadratwurzeln von i sind.

Für $z=3+4i$ ergibt sich auf ähnlichem Weg, dass $r_1=2+i$ und $r_2=-2-i$ die einzigen Quadratwurzeln von $3+4i$ sind.

(c) Es gilt: $i^4=1 \implies i^{4n}=1$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Also folgt

$$i^{123456789}=i^{123456789 \bmod 4}=i^1=i$$

Es ist $\sum_{k=1}^{4} i^k=0$ und deshalb $\sum_{k=1}^{4n} i^k=0$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Somit folgt

$$\sum_{k=1}^{13823807582365} i^k=\sum_{k=1}^{13823807582365 \bmod 4} i^k=\sum_{k=1}^{1} i^k=i.$$

Aufgabe H3 (6 Punkte)
Entscheiden Sie, in Abhängigkeit von $z\in\mathbb{C}$, ob die folgenden Vektoren linear unabhängig sind:

$$\begin{pmatrix}1\\ i\\ 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\ i\\ i\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}z\\ 2i\\ 1+i\end{pmatrix}$$

Lösung: Wir müssen das Gleichungssystem

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\ i\\ 1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0\\ i\\ i\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}z\\ 2i\\ 1+i\end{pmatrix}=0$$

lösen. Aus der zweiten und dritten Zeile erhalten wir $\lambda_1(i-1)+\lambda_3(i-1)=0$, also $\lambda_3=-\lambda_1$. Einsetzen in die zweite Zeile liefert $i\lambda_1+i\lambda_2-2i\lambda_1=0$, also $\lambda_1=\lambda_2$.

Mit der ersten Zeile $\lambda_1+z\lambda_3=0$ folgt dann $\lambda_1(1-z)=0$. Es gibt also nur für $z=1$ die von Null verschiedenen Lösungen $\lambda(1,1,-1)$ (für $\lambda\in\mathbb{R}$). Die Vektoren somit genau für $z\neq 1$ linear unabhängig.