Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad p_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 1 & 1 \\ -1 & 3-t & 1 \\ 0 & 0 & 2-t \end{vmatrix} = (2-t) \begin{vmatrix} 1-t & 1 \\ -1 & 3-t \end{vmatrix}$$

$$= (2-t) \cdot (3 - 4t + t^2 + 1) = (2-t)^3$$

$$\Rightarrow \quad m_A \in \{ (t-2), (t-2)^2, (t-2)^3 \}$$

$$(2E - A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

$$(2E - A)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow m_A = (t-2)^2$$

Jordansche Normalform

Jede komplexe $n \times n$-Matrix ist ähnlich zu einer Matrix in Jordanscher Normalform, dh zu einer Matrix mit "wenigen" Einträgen außerhalb der Diagonalen

Definition (Jordanblock oder Jordankästchen)

Ein Jordanblock ist eine $m \times m$-Matrix der Form

$$J_{m,\lambda} := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \in K^{m \times m}$$

Beispiele $J_{1,\lambda} = (\lambda)$, $J_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

$$J_{3,\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad J_{m,\lambda} = \lambda \cdot E_m + J_{m,0}$$

Lemma Ein Jordanblock $J_{m,\lambda}$ mit $m \geq 2$ ist nicht diagonalisierbar. Der Eigenraum V_λ zum EW λ ist eindimensional mit $V_\lambda = \operatorname{Span}\{e_1\}$. Es gilt $P_{J_{m,\lambda}} = (\lambda - t)^m$ und $m_{J_{m,\lambda}} = (t-\lambda)^m$.

Beweis: $P_{J_{m,\lambda}}(t) = \begin{vmatrix} \lambda-t & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda-t \end{vmatrix} = (\lambda - t)^m$

$\Rightarrow$ λ ist einziger EW mit algebraischer Vielfachheit $e_\lambda = m$. Sei $x \in \mathbb{K}^n$ mit

$J_{m,\lambda} \cdot x = \lambda \cdot x \Rightarrow 0 = (J_{m,\lambda} - \lambda E_m) x$

$= J_{m,0} \cdot x = (x_2, x_3, \ldots, x_m, 0)^T$

$\Rightarrow V_\lambda = \{(x_1, 0 \ldots, 0)^T \in \mathbb{K}^m \mid x_1 \in \mathbb{K}\}$

$\Rightarrow \dim V_\lambda = 1 = d_\lambda < e_\lambda \Rightarrow$ nicht diag. für $m \geq 2$.

zu Lemma Jordan: Cayley-Hamilton $\Rightarrow$

$m_{J_{m,\lambda}} \mid P_{J_{m,\lambda}} = (\lambda - t)^m$, d.h.

$m_{J_{m,\lambda}} = (t-\lambda)^l$ mit $1 \leq l \leq m$.

Für die $\overset{\text{kan.}}{\vee}$ Basis $(e_1, e_2, \dots, e_m)$ von $\mathbb{K}^m$ gilt

$(J_{m,\lambda} - \lambda E)^l e_m = e_{m-l}$, d.h. für

$1 \leq l < m$ ist $(J_{m,\lambda} - \lambda E)^l \neq 0$

$\Rightarrow m_{J_{m,\lambda}} = (t-\lambda)^m$. $\square$

Definition (Jordansche Normalform)

Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ besitzt Jordansche Normalform, wenn sie flg. Blockgestalt hat:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{J_t} \end{pmatrix}$$ wobei $J_1, \dots, J_t$ Jordanblöcke sind.

Beispiel (JNF)

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}0&1\\0&0\end{matrix}} & & 0 \\ & \boxed{4} & \\ 0 & & \boxed{5}\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{matrix}} & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix}1&1\\0&1\end{matrix}}\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \boxed{1} & & & 0 \\ & \boxed{2} & & \\ & & \boxed{3} & \\ 0 & & & \boxed{4}\end{pmatrix}$$

nicht JNF

$$\begin{pmatrix} 1&1&0\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1&1&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Hauptsatz über die Jordansche Normalform

Sei V ein n-dim. komplexer Vektorraum und $\varphi \in L(V,V)$. Dann existiert eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V, so dass ${}_{\mathcal{B}}[\varphi]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ Jordansche Normalform hat.

Eine solche Basis $\mathcal{B}$ heißt Jordanbasis von φ. Ist $\mathcal{B}'$ eine weitere Jordanbasis von φ, so unterscheiden sich ${}_{\mathcal{B}}(\varphi)_{\mathcal{B}}$ und ${}_{\mathcal{B}'}(\varphi)_{\mathcal{B}'}$ nur durch eine Permutation der Jordanblöcke.

Folgerungen: 1 Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Dann ist A ähnlich zu $A' \in \mathbb{C}^{n \times n}$ in Jordanscher Normalform. Sind A' und A'' ähnlich und beide in JNF, so unterscheiden sie sich nur durch eine Permutation der Jordanblöcke. In diesem Sinn ist A' eindeutig (bis auf Permutation der Jordanblöcke) und heißt auch die Jordansche Normalform von A

2 $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ sind genau dann ähnlich, wenn sie die gleiche JNF haben.

3 (Eigenwerte, Vielfachheiten bei JNF)

Sei $A = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{J_t} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit $J_i = J_{m_i \lambda_i}$ $1 \leq i \leq t$

$(\Rightarrow \sum_{i=1}^{t} m_i = n$, λ_i können mehrfach vorkommen)

Bei zu (3): Die EW von A stehen auf der Diagonalen und die algebraische Vielfachheit ist die Summe der m_i zu gleichen EW λ.

Für $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

$$(A-\lambda E)\cdot x = 0 \iff 0 = \cancel{\begin{pmatrix} \boxed{J_1-\lambda E_{m_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{J_t-\lambda E_{m_t}} \end{pmatrix}}$$

$$\iff 0 = \begin{pmatrix} \boxed{J_1-\lambda E_{m_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{J_t-\lambda E_{m_t}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{m_1} \end{matrix}} \\ \boxed{\vdots} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$\iff \forall i = 1,\dots,t$ gilt $(J_i - \lambda E_{m_i})\cdot [x]_i = 0$

mit $[x]_i = \begin{pmatrix} x_{\sum_{j=1}^{i-1} m_j + 1} \\ \vdots \\ x_{\sum_{j=1}^{i} m_j} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m_i}$

$\iff \forall i = 1,\dots,t$ gilt $[x]_i = y$ und

$$(\lambda_i - \lambda)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{m_i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_2 \\ \vdots \\ y_{m_i} \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$\iff \forall i = 1,\dots,t$ gilt $[x]_i = 0$, falls $\lambda_i \neq \lambda$

und $[x]_i \in \mathrm{Span}\{e_1\}$, falls $\lambda_i = \lambda$.

zu 3 : $\Rightarrow$ Geometrische Vielfachheit von λ

$= \dim V_\lambda = \#\{\lambda_i = \lambda \mid i = 1, \dots, t\}$

$=$ Anzahl der Jordanblöcke zum EW λ.

4 (Minimalpolynom bei JNF)

Sei $A = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{J_t} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ in JNF

Kästchenstruktur $\Rightarrow$ $A^k = \begin{pmatrix} \boxed{J_1^k} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{J_t^k} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $\forall$ Polynome $p \in \mathbb{C}[t]$ gilt

$$p(A) = \begin{pmatrix} \boxed{p(J_1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{p(J_t)} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $m_A(t) = \prod_{j=1}^{r} (t - \lambda_j)^{p_j}$, wobei

$\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die $\overset{\text{paarw.}}{\text{verschiedenen}}$ EW von A bezeichnen

$(r \le t)$ und für $1 \le j \le r$ $p_j := \max\limits_{1 \le i \le t} \{m_i \mid \lambda_i = \lambda_j\}$

Bem. zu (4): $p_j \mathrel{\hat{=}}$ Größe des größten Jordanblocks zum EW λ_j.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{matrix}} & & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{matrix}} & \\ 0 & & \boxed{\begin{matrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{matrix}} \end{pmatrix}$$

EW von A sind 1 und 2.

Algebraische Vielfachheiten $e_1 = 4$, $e_2 = 2$.

$$P_A = (1-t)^4 \cdot (2-t)^2$$

$\dim(V_1) = 2 = \#$ Kästchen zum EW 1

$\dim(V_2) = 1 = \#$ —"— zu EW 2

$$m_A = (t-1)^2 (t-2)^2$$

Anwendung (Matrixpotenzen)

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Gesucht ist $A^{1000} \in \mathbb{C}^{n\times n}$:

1. Schritt Finde JNF von A mit Jordanbasis, d.h. $S \in GL(n, \mathbb{C})$ mit $S^{-1}AS = \tilde{A}$ in JNF.

$$\Rightarrow A^{1000} = (S\tilde{A}S^{-1})^{1000} = S\tilde{A}^{1000}S^{-1}$$

2. Schritt: Berechne $\tilde{A}^{1000}$:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{J_t} \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{A}^{1000} = \begin{pmatrix} \boxed{J_1^{1000}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{J_t^{1000}} \end{pmatrix}$$

3. Schritt Berechne J^{1000} für ein Jordankästchen:

$$J = \lambda E + N \quad \text{mit} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

$$(\lambda E + N)^k \underset{\lambda E\cdot N = N\cdot\lambda E}{=} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (\lambda E)^{k-i} N^i$$

Es gilt $N^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ← i-te Nebendiagonale

einfache Rechnung bzw $N^i(e_m) = e_{m-i}$

$$\Rightarrow \quad N^i = (0) \quad \text{für } i \geq n$$

$$\Rightarrow \quad (\lambda \cdot E + N)^k = \sum_{i=0}^{\min(k,n-1)} \binom{k}{i} (\lambda E)^{k-i} N^i$$

$$= \lambda^k E + k \cdot \lambda^{k-1} N + \frac{k \cdot (k-1)}{2} \lambda^{k-2} N^2 + \dots$$

Bsp:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^k = \left(\begin{pmatrix} 2 & & 0 \\ & 2 & \\ 0 & & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^k$$

$$= 2^k \cdot E + k \cdot 2^{k-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cancel{+ 2^{k-2}}$$

$$+ 2^{k-2} \binom{k}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^k & k \cdot 2^{k-1} & \binom{k}{2} \cdot 2^{k-2} \\ 0 & 2^k & k \cdot 2^{k-1} \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$$