Kap 9 Der Satz von Cayley-Hamilton und die Jordansche Normalform (1)

Definition (Einsetzungshomomorphismus)

(1) Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine Matrix und

$p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n \in \mathbb{K}[t]$ ein

Polynom. Wir definieren $p(A) \in K^{n\times n}$

durch $p(A) := a_0 E + a_1 A + \dots + a_n A^n$

~~Es gilt~~ (d.h. man setzt A in das

Polynom p ein)

Man rechnet leicht nach, dass die Abb.

$\Phi_A : \mathbb{K}[t] \longrightarrow \mathbb{K}^{n\times n} \quad p \longmapsto p(A)$

eine lineare Abbildung ist, die zusätzlich

mit der Multiplikation verträglich ist:

$\Phi_A(p) \cdot \Phi_A(q) = p(A)\cdot q(A) = (p\cdot q)(A) = \Phi_A(p\cdot q)$

$\forall\, p, q \in \mathbb{K}[t]$

zu Def. Einsetzhomo :

2 Ist $\varphi \in L(V,V)$ eine lineare Abb. von V nach V und $p = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i \in K[t]$,

so definieren wir $p(\varphi) := \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi^i$

$$= a_0 \cdot id_V + a_1\varphi + a_2\varphi^2 + \ldots + a_n\varphi^n \in L(V,V)$$

Wieder ist $\Phi_\varphi : \mathbb{K}[t] \longrightarrow L(V,V)$ $p \longmapsto p(\varphi)$

ein $\mathbb{K}$-Algebrenhomomorphismus, d.h. linear und verträglich mit der Multiplikation.

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $p = t^2 - 2t + 1$
$= (t-1)^2$

$$p(A) = 1 \cdot E - 2A + A^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

oder $p(A) = (A - E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Satz von Cayley – Hamilton

Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und $p_A = \det(A - tE)$ das charakteristische Polynom von A.

Dann gilt: $p_A(A) = 0$.

Beweis: Sei $\mathrm{Adj}(A - tE)$ die Adjunkte von $A - tE$ (vgl. Kap 3 Determinante / Inverse)

d.h.
$$\mathrm{Adj}(A-tE)\cdot(A-tE) = \det(A-tE)\cdot E = p_A(t)\cdot E \quad (*)$$

Wir fassen $\mathrm{Adj}(A-tE)$ als eine Matrix auf, ~~die~~ deren Einträge Polynome sind.

Die Einträge in $\mathrm{Adj}(A-tE)$ sind Polynome vom Grad $\leq n-1$, als Determinanten von $(n-1)\times(n-1)$ Matrizen, die aus $(A-tE)$ durch Streichen einer Spalte und Zeile entstehen.

zu Beweis Cayley-Hamilton:

wir erhalten also

$$\operatorname{Adj}(A-tE) = C_0 + C_1 t + \ldots + C_{n-1} t^{n-1}$$

mit $C_0, C_1, \ldots, C_{n-1} \in \mathbb{K}^{n\times n}$

Setzen wir dies in $(*)$ ein, erhalten wir mit Koeffizientenvergleich:

$$\left(p_A(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + (-1)^n t^n \right)$$

$$\begin{aligned}
C_0 A &= a_0 E && | \cdot E \\
C_1 A - C_0 &= a_1 E && | \cdot A \\
C_2 A - C_1 &= a_2 E && | \cdot A^2 \\
&\vdots && \vdots \\
C_{n-1} A - C_{n-2} &= a_{n-1} E && | \cdot A^{n-1} \\
- C_{n-1} &= (-1)^n E && | \cdot A^n
\end{aligned}$$

$$\Sigma \qquad 0 = p_A(A) \qquad \square$$

Beispiele: (1) $A := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$$p_A(t) = (1-t)^2 - 9 = \cancel{(-8-t)}$$

$$= (-2-t)\cdot(4-t) = t^2 - 2t - 8$$

Cayley-Hamilton $\Rightarrow$ $A^2 - 2A - 8E = 0$, d.h.

$$A^2 = 2A + 8E \Rightarrow$$

$$A^3 = A\cdot(A^2) = A\cdot(2A+8E) = 2A^2 + 8A$$

$$= 12A + 16E$$

induktiv sind also alle Potenzen A^n Linearkombinationen von A und E.

Weiter gilt: $\cancel{A}\ 8E = A^2 - 2A = A\cdot(A-2E)$

$$\Rightarrow A\cdot \tfrac{1}{8}(A-2E) = E \Rightarrow A^{-1} = \tfrac{1}{8}A - \tfrac{1}{4}E$$

$~~und~~$ $$A^{-2} = \left(\tfrac{1}{8}A - \tfrac{1}{4}E\right)^2 = \tfrac{1}{64}A^2 - \tfrac{1}{16}A + \tfrac{1}{16}E$$

$$= -\tfrac{1}{32}A + \tfrac{3}{16}E$$, d.h. auch alle Potenzen

A^{-n} sind Linearkomb. von A und E

Satz und Definition (Minimalpolynom)

Für jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ existiert genau ein Polynom m_A minimalen Grades mit Höchstkoeffizient 1 für das $m_A(A) = 0$ gilt.

Das Polynom m_A heißt Minimalpolynom von A.

Beweis: Cayley-Hamilton $\Rightarrow p_A(A) = 0$, d.h. das Polynom $(-1)^n \cdot p_A$ hat den Höchstkoeff. 1 und annulliert A.

$\Rightarrow$ Die Menge $I_A := \{ p \in \mathbb{K}[t] \mid p$ hat Höchstkoeff 1 und $p(A) = 0 \}$ ist nicht leer.

$\Rightarrow$ Es gibt ein Polynom mit minimalem Grad in I_A. $\rightarrow$ Existenz von m_A.

<u>Zu Beweis m_A:</u> <u>Eindeutigkeit:</u> Sei $Q \in I_A$ mit gleichem Grad wie m_A (d.h. minimal) etwa $\operatorname{Grad} Q = \operatorname{Grad} m_A = d$. Dann gilt $R := m_A - Q$ hat Grad $\leq d-1$ und

$R(A) = m_A(A) - Q(A) = 0$. Wäre $R \neq 0$ mit Höchstkoeff. $c \neq 0$ $\Rightarrow$ $c^{-1}R \in I_A$ mit $\operatorname{Grad}(c^{-1}R) < \operatorname{Grad}(m_A)$ $\lightning$.

<u>Lemma</u> Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und $p \in \mathbb{K}[t]$ mit $p(A) = 0$. ~~Darum~~ Dann gilt: m_A teilt p, d.h. $\exists\, q \in \mathbb{K}[t]$ mit $p = m_A \cdot q$.

<u>Beweis:</u> Polynomdivision ergibt Polynome q, r mit

$p = m_A \cdot q + r$ und $\operatorname{Grad} r < \operatorname{Grad} m_A$

wegen $0 = p(A) = \underbrace{m_A(A)}_{=0} \cdot q(A) + r(A) \Rightarrow r(A) = 0$

wie oben folgt aus der Minimalität von m_A, dass $r = 0$ gelten muss, d.h. $m_A | p$ $\square$

Berechnung von m_A über $\mathbb{C}$

Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ können wir das charakteristische Polynom von $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ in Linearfaktoren zerlegen:

$$p_A(t) = (\lambda_1 - t)^{e_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda_r - t)^{e_r}$$

mit algebraischen Vielfachheiten $e_1, \ldots, e_r$.

Da m_A ein Teiler von p_A ist, ist jede Nullstelle von m_A auch eine von p_A

$$\Rightarrow \quad m_A(t) = (t - \lambda_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_r)^{k_r}$$

mit $0 \leq k_i \leq e_i$. Um m_A zu bestimmen, probiert man alle diese endlich vielen Möglichkeiten aus und wählt das Polynom mit minimalem Grad, welches A annulliert.

Eine Vereinfachung ist flg. Tatsache:

alle k_i müssen größer gleich 1 sein:

<u>Lemma</u> Für $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ haben p_A und m_A die gleichen Nullstellen.

<u>Beweis:</u> Wegen $m_A \mid p_A$ sind alle NS von m_A auch NS von p_A.

Sei nun $\lambda \in \mathbb{K}$ eine NS von p_A, also ein Eigenwert. Sei $v \in \mathbb{K}^n$ ein Eigenvektor zu λ. Dann gilt $A^k v = \lambda^k v$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Damit gilt:

$$0 = m_A(A)\cdot v = \sum_{k=0}^{m} b_k A^k v = \sum_{k=0}^{m} b_k \lambda^k v$$

$$= m_A(\lambda)\cdot v \underset{v\neq 0}{\Longrightarrow} m_A(\lambda) = 0.$$