

Zu Bsp ④  $O(n)$ ,  $SO(n)$ :

Wegen  $A^T A = E$  für  $A \in O(n) \Rightarrow$

$$1 = \det(E) = \det(A^T) \det(A) = \det(A)^2, \text{ d.h.}$$

$O(n)$  zerfällt in zwei disjunkte Teile

$$O(n) = SO(n) \cup \underbrace{O(n)^-}_{=: O(n)^-} = \{A \in O(n) \mid \det A = -1\}$$

Es gilt: (I) Ist  $A \in O(n)^-$ , so ist  $\lambda = -1$   
immer ein Eigenwert von  $A$

(II) Ist  $A \in SO(n)$  und  $n$  ungerade, so ist  
 $\lambda = 1$  immer ein EW von  $A$

Beweis: Fixiere  $A \in O(n)$ , dann gilt:

$$\begin{aligned} P_A(t) &= |A - tE| = |A - tA^T A| = |E - tA^T| |A| \\ &= t^n |A| \left| \frac{1}{t} E - A^T \right| = t^n (-1)^n |A| |A - \frac{1}{t} E| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P_A(t) = t^n (-1)^n |A| \det(A) P_A\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$\text{Für } t=1 \text{ und } A \in SO(n) \Rightarrow P_A(1) = (-1)^n P_A(1)$$

d.h.  $P_A(1) = 0$ , falls  $n$  ungerade

zu Bsp (4)  $O(n), SO(n)$ : Für  $t = -1$  und  $A \in O(n)^-$

$$\text{gilt } P_A(-1) = \underbrace{(-1)^n \cdot (-1)^n}_{=1} \cdot (-1) \cdot P_A(-1)$$

$$\Rightarrow P_A(-1) = 0.$$

Für  $O(2)$  wurde schon in einem Beispiel vorher klassifiziert:

Kreisgruppe

$$SO(2) = \left\{ R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in [0, 2\pi[ \right\}$$

$$O(2)^- = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in [0, 2\pi[ \right\}$$

$SO(2) \cong$  Drehungen um den Winkel  $\alpha$

$O(2)^- \cong$  Spiegelung an der Geraden durch  $0$  und  $e^{i\frac{\alpha}{2}}$ .

Satz (Klassifikation von  $O(3)$ )

Zu jedem  $A \in O(3)$  existiert eine ONB  $\{v_1, v_2, v_3\}$  von  $\mathbb{R}^3$  und  $\alpha \in [0, \pi[$  mit

mit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$  für  $A \in SO(3)$

und  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$  für  $A \in O(3)^-$ . Für  $\alpha$  gilt  $\text{Spur } A = 1 + 2\cos \alpha$

Satz (Klassifikation von  $O(3)$ )

Zu jedem  $A \in O(3)$  existiert eine ONB  $\{v_1, v_2, v_3\}$  von  $\mathbb{R}^3$  und  $\alpha \in [0, \pi]$

mit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{D_\alpha} \\ 0 & & \end{pmatrix}$  für  $A \in SO(3)$

und  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{D_\alpha} \\ 0 & & \end{pmatrix}$  für  $A \in O(3)^-$

wobei  $D_\alpha := \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$  und der

Drehwinkel  $\alpha$  durch die Gleichung

$$\text{Spur } A = \cancel{+1} + 2\cos \alpha \quad \det A = 2\cos \alpha$$

bestimmt werden kann.

Beweis: 1. Fall  $A \in SO(3)$ , dh  $\det A = +1$

(I)  $\Rightarrow$   $A$  hat den EW  $\lambda = +1$

dh  $\exists v_1 \in \mathbb{R}^3$  mit  $\|v_1\|=1$  und  $A \cdot v_1 = v_1$

zu Beweis  $O(3)$  : Betrachte die induzierte

lineare Abb  $L_A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$   $A$   $L_A(x) := A \cdot x$

$B_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$  kanonische Basis  $(L_A)_{B_0} = A$ ,

dh.  $L_A$  ist orthogonal.

Setze  $U_1 := \text{Span}\{v_1\} \Rightarrow L_A$  und  $L_A^* = L_A^*$

lassen  $U_1$  invariant

Lemma  $\Rightarrow U_2 := U_1^\perp$  ist auch  $L_A$  und  $L_A^*$  invariant

$L_A|_{U_2}: U_2 \rightarrow U_2$  ist orthogonal, denn

$$\langle L_A|_{U_2} x \mid L_A|_{U_2} y \rangle = \langle x \mid y \rangle \quad \forall x, y \in U_2$$

(gilt sogar  $\forall x, y \in \mathbb{R}^3$ )

wähle ONB  $B' := \{v_2, v_3\}$  von  $U_2$ . Dann ist

$(L_A|_{U_2})_{B'} \in O(2)$ , da  $L_A|_{U_2}$  orthogonal

sogar  $(L_A|_{U_2})_{B'} \in SO(2)$ , denn

mit  $B := \{v_1, v_2, v_3\}$  gilt  $(L_A)_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (L_A)_{B'} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

und  $1 = \det L_A = 1 \cdot \det_{B'}(L_A|_{B'})$ .

Zu Beweis  $O(3)$  :

$$\xrightarrow{\text{Klass } O(2)} \Rightarrow \left( LA|_{U_2} \right)_{B'} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

aber mit  $\alpha \in [0, 2\pi[$  durch Vertauschen

von  $v_2$  mit  $v_3$  gilt  $0 \leq \alpha \in [0, \pi]$

(vgl. Bsp in Kop 6)

2. Fall  $A \in O(3)^- \Rightarrow \exists$  EV  $v_1$  zum

EW  $\lambda = -1$ . Betrachte wieder

$U_2 := \text{Span} \{v_2, v_3\}^\perp$ . Dann ist  $U_2$   $L_A$ -invariant

und  $\left( LA|_{U_2} \right)_{B'} \in SO(2)$ , denn

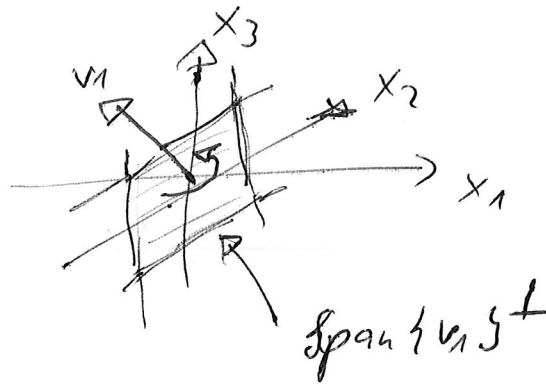
$$-1 = \det(LA) = (-1) \cdot \det(LA|_{U_2}).$$

$$\Rightarrow \left( LA \right)_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{P_\alpha} \\ 0 & & \end{pmatrix}. \quad \square$$

Bem (SO(3)) Die Klassifikation von

SO(3) sagt: A Die Elemente von SO(3)

sind genau die Drehungen um eine Achse  $\text{span}\{v_1\}$  in  $\mathbb{R}^3$  mit dem Drehwinkel  $\alpha$ .



Überraschend: ~~Es~~ Führt man zwei Drehungen

an verschiedenen Achsen mit verschiedenen

Winkeln hintereinander aus, so ist die

resultierende Abb. wieder eine Drehung um

eine Achse. [SO(3) ist eine Gruppe !!!]

Satz (Eulersche Winkel (Vorsicht))

Wir bezeichnen mit  $R_x(\alpha) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & D_\alpha & 0 \end{pmatrix}$

die Drehung um die  $x$ -Achse mit Winkel  $\alpha$ ,

und mit  $R_z(\alpha) := \begin{pmatrix} |D_\alpha| & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  die Drehung

um die  $z$ -Achse mit Winkel  $\alpha$ . Dann gilt:

Zu jedem  $A \in SO(3)$  existieren Eulersche -

Winkel  $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 2\pi[$  mit

$$A = R_z(\gamma) \cdot R_x(\beta) \cdot R_z(\alpha)$$

Beweis: Zeige zunächst (\*) Für  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

mit  $1 = \|v\|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$  existieren  $\delta, \beta \in [0, 2\pi[$

mit  $R_z(\delta) \cdot R_x(\beta)(e_3) = v$ .

Beweis:  $v_3^2 + (v_1^2 + v_2^2) = 1 \Rightarrow \exists \beta \in [0, 2\pi[$

mit  $v_3 = \cos(\beta) \Rightarrow R_x(\beta)(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ w_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

mit  $w_2 = -\sin(\beta)$ , d.h.  $w_2^2 = \sin^2(\beta) = v_1^2 + v_2^2$

$$\Rightarrow \left(\frac{v_1}{w_2}\right)^2 + \left(\frac{v_2}{w_2}\right)^2 = 1$$

zu Beweis Eulersche Winkel :

$$\Rightarrow \exists \gamma \in [0, 2\pi[ \quad \text{mit} \quad \frac{v_1}{w_2} = -\sin(\gamma)$$

$$\text{und} \quad \frac{v_2}{w_2} = \cos(\gamma)$$

$$\Rightarrow R_2(\gamma) \begin{pmatrix} 0 \\ w_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}. \quad \Rightarrow (*) \text{ gilt.}$$

Sei also  $A \in SO(3)$ . Für  $v := A(e_3)$

existieren nach (\*)  $\gamma, \beta \in [0, 2\pi[$  mit

$$e_3 = R_x \left[ R_2(\gamma) \circ R_x(\beta) \right]^{-1} (v) = \left[ R_2(\gamma) \circ R_x(\beta) \right]^{-1} \circ A(e_3)$$

$\Rightarrow B := \left[ R_2(\gamma) \circ R_x(\beta) \right]^{-1} \circ A \in SO(3)$  hat

den EV  $e_3$  zum EW 1

Klassif.  $\Rightarrow B = R_2(\alpha)$  für ein  $\alpha \in [0, 2\pi[$

$$\Rightarrow A = R_2(\gamma) \circ R_x(\beta) \circ R_2(\alpha) \quad \square$$

Bem: Es gibt vielen ( $\approx 12$ ) Konventionen für

Eulersche Winkel: diese hier  $(z, x', z'')$ ;

aber es gibt aber auch  $(z, y', z'')$  oder

$(x, y', z'')$ ,  $(z, y', x'')$ , ... Alternativ Darstellung  
durch Quaternionen



