zu Beweis pos. Def. : 1 <=> 2 :

A ist symmetrisch, daher bzgl. einer ONB diagonalisierbar. In den neuen Koordinaten

$$x^T A x = \langle Ax | x \rangle_2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i')^2$$

$(x' = Sx)$ mit EW $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ von A, dh.

A pos definit $\Leftrightarrow$ $\lambda_i > 0 \ \forall i$

1 => 3 : Betrachte die Hauptminoren

$$A_r = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{pmatrix} \text{ und } y \in \mathbb{R}^r$$

$$\Rightarrow y^T A_r y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}^T A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} > 0 \text{ für } y \neq 0$$

dh A_r ist ebenfalls symmetrisch und positiv definit

$\overset{1 \Leftrightarrow 2}{\Longrightarrow}$ A_r diagonalisierbar und alle EW positiv

$$\Rightarrow \det A_r = \prod_{i=1}^{r} \mu_i > 0.$$

μ_i EW von A_r.

zu Beweis pos. definit:

3 $\Rightarrow$ 2 : (Induktion nach n) $n=1$ ✓

$n \to n+1$: Sei $A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ symmetrisch

mit $\det A_r > 0 \quad \forall r = 1,\dots,n+1$

Nach IV $\Rightarrow A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ positiv definit, alle EW positiv

$\Rightarrow x^T A x > 0 \quad \forall x \in U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \right\} \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

~~Es sei~~ ~~[illegible]~~ Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ die nicht positiven EW von A.

Wähle Basen ~~$\{v_{11}, \dots, v_{1i_1}\}, \dots, \{v_{s1}, \dots$~~ B_i von allen zugehörigen Eigenräumen V_{λ_i}, $1 \le i \le s$

und betrachte $W := \operatorname{Span}\{\cancel{B}\ \bigcup_{i=1}^{s} B_i$

($W \triangleq$ Summe der Eigenräume zu nicht positiven EW)

Klar: $A(W) \subseteq W$ und 1 $\Leftrightarrow$ 2 zeigt

$v^T A v \le 0 \quad \forall v \in W$.

Zu Beweis positiv definit: ③ $\Rightarrow$ ①:

$\Rightarrow U \cap W = \{0\}$. Mit Dim-Formel

$n+1 \geq \dim(U+W) = \dim U + \dim W$

$= n + \dim W \Rightarrow \dim W = 0$ oder $= 1$

$\Rightarrow$ Es gibt also mit Vielfachheiten gezählt entweder einen oder keinen nicht positiven EW

Wegen $\det A = \prod_{i=1}^{n+1} \lambda_i > 0$ $(r = n+1)$

folgt es gibt keinen nicht positiven EW $\square$

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$

Hauptminoren: $\det A_1 = 3$, $\det A_2 = 2$

$\det A_3 = 12 - 2 - 8 = 2$

$\det A_4 = +1 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} + 6 \cdot \det A_3 = (-1) \cdot 2 + 12 = 10$

$\Rightarrow$ A ist positiv definit.

Unitäre und orthogonale Gruppen

Definition (Gruppe) Eine Menge $G \neq \emptyset$ mit einer Verknüpfung $\cdot : G \times G \to G$ heißt Gruppe, falls gilt:

1. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \forall\, a,b,c \in G$ (assoziativ)
2. $\exists\, e \in G$ mit $e \cdot a = a \cdot e = a \quad \forall\, a \in G$ (neutrales Element)
3. $\forall\, a \in G \;\exists\, a^{-1} \in G$ mit $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$ (Inverses Element)

Gilt zusätzlich das Kommutativgesetz $a \cdot b = b \cdot a \quad \forall\, a,b \in G$, so heißt G eine abelsche Gruppe.

Beispiele (1) (Allgemeine lineare Gruppe)

$GL(n, \mathbb{K}) = \{A \in \mathbb{K}^{n \times n} \mid \det A \neq 0\}$

ist eine Gruppe mit Matrizenmult. als Verknüpfung

Beweis: Für $A, B \in GL(n, \mathbb{K})$ gilt

$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) \neq 0 \Rightarrow A \cdot B \in GL(n, \mathbb{K})$

assoziativ, da Matrixmult. assoziativ

$E \in GL(n, \mathbb{K})$ ist das neutrale Element

Für $A \in GL(n, \mathbb{K})$ gilt $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1} \neq 0$

d.h. $A^{-1} \in GL(n, \mathbb{K})$. $GL(n, \mathbb{K})$ nur für $n = 1$ kommutativ.

(2) (Spezielle lineare Gruppe)

$SL(n, \mathbb{K}) = \{A \in \mathbb{K}^{n \times n} \mid \det A = 1\}$

ist auch eine Gruppe, denn $A, B \in SL(n, \mathbb{K})$

$\Rightarrow \det(A \cdot B) = 1 \cdot 1 = 1$, sowie $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1} = 1$

(3) (Unitäre Gruppen)

$U(n) := \{ A \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid A \text{ ist unitär} \}$

$SU(n) := \{ A \in \cancel{\mathbb{C}^{n\times n}}\, U(n) \mid \det A = 1 \}$

sind Gruppen:, ~~denn~~ sind $A, B \in U(n)$

so auch $A \cdot B$, denn $(A \cdot B)^* \cdot (A \cdot B)$

$= B^* A^* A \cdot B = B^* E B = B^* B = E$.

A und $A^{-1} \in U(n)$, denn $(A^{-1})^* A^{-1}$

$= (A^*)^{-1} A^{-1} = (A \cdot A^*)^{-1} = E^{-1} = E$

alle anderen Regeln wie bei $GL(n, \mathbb{K}) / SL(n, \mathbb{K})$.

zB $U(1) = \{ a \in \mathbb{C} \mid |a| = 1 \}$ Kreisgruppe abelsch.

(4) (orthogonale Gruppen)

$O(n) := \{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A \text{ ist orthogonal} \}$

$SO(n) = \{ A \in O(n) \mid \det A = 1 \}$

~~wegen $A \in O(n)$ $|\det A| = 1$ für $A \in O(n)$~~

sind Gruppen analog zu $U(n) / SU(n)$.