Korollar (Hauptachsentransformation)

~~Sei~~ Für $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ sind äquivalent:

1. A ist hermitesch für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ bzw symmetrisch für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

2. $\exists$ eine unitäre ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) bzw orthogonale ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) Matrix $S \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ~~derart~~, dass

$$S^{-1} A S = S^* A S$$ Diagonalgestalt hat mit reellen Diagonalelementen.

Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nennt man die Matrix S Hauptachsentransformation für A, und die Eigenvektoren von A (dh die Spalten von S) nennt man die Hauptachsen von A.

Beweis: Folgt direkt aus der Diagonalisierbarkeit selbstadj. Abb. analog zum Fall normaler Matrizen $\square$

Beispiele 1 $A := \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 10 \\ 2 & 11 & -8 \\ 10 & -8 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

ist symmetrisch $\Rightarrow$ diagonalisierbar bzgl ONB

Nachrechnen liefert:

$p_A(t) = -(t-1)(t-2)(t+1)$

$\Rightarrow$ EW $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -1$

EV: $w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $w_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Normieren liefert eine ONB $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$

$v_1 := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_3 := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Trafomatrix (Hauptachsentrafo)

$S = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ orthogonal

und $S^{-1}AS = S^TAS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Beispiel ②: $V_n := \{ \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \mid a_k, b_k \in \mathbb{R} \}$

mit SKP $\langle \cdot | \cdot \rangle_{L^2}$ $\quad \Delta(p) := p''$

$\Rightarrow \Delta = \varphi \circ \varphi$ mit $\varphi(p) := p'$ daher gilt

$\Delta^* = (\varphi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \varphi^* \overset{Bsp}{=} (-\varphi) \circ (-\varphi) = \varphi^2 = \Delta$

selbstadjungiert.

Berechnung der Eigenwerte / Eigenfunktionen:

$\Delta(\cos(kx)) = -k^2 \cos(kx) \quad k = 0, .., n$

$\Delta(\sin(kx)) = -k^2 \sin(kx) \quad k = 1, .., n$

$\Rightarrow$ Für $k' \neq k$ ist $\langle \sin(k'x) | \cos(kx) \rangle_{L^2}$

$= \langle \sin(k'x) | \sin(kx) \rangle_{L^2} = \langle \cos(k'x) | \cos(kx) \rangle_{L^2} = 0$

denn EV zu versch. EW sind senkrecht zueinander

Außerdem $\langle \cos(kx), \sin(kx) \rangle_{L^2} = \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(kx) \sin(kx)\, dx$

$= 0$ (ungerade Fktn)

Zu Bsp (c): $\Rightarrow \{1, \cos(kx), \sin(kx) \mid k = 1, \dots, n\}$

Basis aus EV von Δ von V_n sogar OS.

wegen $\|\cos(kx)\|_{L^2}^2 = \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(kx)\cos(kx)\,dx$

$$\underset{\text{part.}}{=} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{k}\sin(kx) \cdot k\sin(kx)\,dx = \|\sin(kx)\|_{L^2}^2$$

und $\int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2(kx) + \cos^2(kx)\,dx = \int_{-\pi}^{+\pi} 1 = 2\pi$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\|1\|_{L^2}^2 = \|\cos(kx)\|_{L^2}^2 = \|\sin(kx)\|_{L^2}^2 = \pi$$

$\Rightarrow$ ONB von V_n ist:

$$B := \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(kx), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(kx) \;\middle|\; 1 \le k \le n \right\}$$

$$V_{k^2}(\Delta) = \operatorname{Span}\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(kx), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(kx) \right\}_{1 \le k \le n}$$

$$V_0(\Delta) = \operatorname{Span}\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\}$$

$${}_B(\Delta)_B = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 4 & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & n^2 \end{pmatrix}$$

Definitheit

Betrachte eine quadratische Form $q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

mit $q(x) := \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 + \sum_{i<j} b_{ij} x_i x_j$

mit Koeffizienten $a_i, b_{ij} \in \mathbb{R}$.

<u>Frage</u>: Wie sieht $\{x \in \mathbb{R}^n \mid q(x) = 1\}$ aus? beschränkt / unbeschränkt?

<u>Beispiel</u>: $q(x) := x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2$

<u>Trick</u>: $q(x) = \langle Ax \mid x \rangle_2 = x^T A x$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \text{ denn } \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle_2$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \\ 3x_1 + x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1^2 + 3x_2x_1 + 3x_1x_2 + x_2^2$$

<u>EW</u>: $p_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 3 \\ 3 & 1-t \end{vmatrix} = (1-t)^2 - 9$

$\Rightarrow \lambda_1 = 4, \ \lambda_2 = -2$

LAP Kap 8

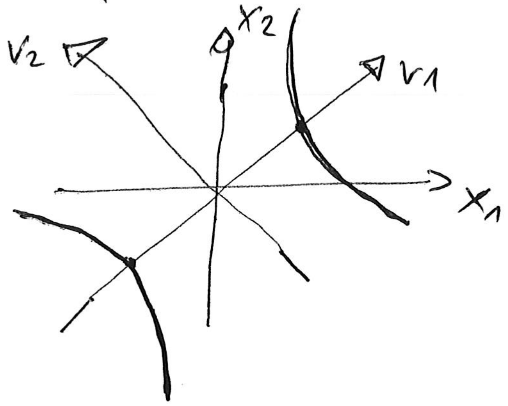
Zu Bsp: $\Rightarrow$ $\exists$ ONB $\{v_1, v_2\}$ von $\mathbb{R}^2$

aus EV $\Rightarrow$ $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid q(x) = 1\}$

$= \{x = t_1 v_1 + t_2 v_2 \mid \langle A(t_1 v_1 + t_2 v_2) \mid t_1 v_1 + t_2 v_2 \rangle_2 = 1\}$

$= \{t_1 v_1 + t_2 v_2 \mid \langle 4 t_1 v_1 - 2 t_2 v_2 \mid t_1 v_1 + t_2 v_2 \rangle_2 = 1\}$

$= \{ \quad -\text{''}- \quad \mid 4 t_1^2 - 2 t_2^2 = 1\}$



Hyperbel

unbeschränkt in $\mathbb{R}^2$.

~~Statt $\langle Ax \mid x \rangle_2$ schreibt~~

Man sieht allgemeiner geht durch Hauptachsentransformation jede Gleichung der Form $x^T A x = 1$ mit symmetrischem A über in $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i')^2 = 1$, wobei $\{x_i'\}$ die Koordinaten bzgl. der Hauptachsen sind.

LAP Kap 8 zu Bsp

An der letzten Gleichung $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i')^2 = 1$

sieht man direkt: $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x^T A x = 1\}$ ist

① beschränkt, $\neq \emptyset$, falls alle λ_i positiv

② $= \emptyset$, falls alle $\lambda_i \leq 0$

③ unbeschränkt, falls ein EW > 0 und EW ≤ 0.

dh. die Eigenwerte von A bestimmen den Typ der Quadrik $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x^T A x = 1\}$.

Definition (definit) Sei A eine symmetrische, reelle $n \times n$-Matrix. A heißt

- positiv definit, falls $\langle Ax | x \rangle_2 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
- negativ definit, falls $\langle Ax | x \rangle_2 < 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
- positiv semidefinit, falls $\langle Ax | x \rangle_2 \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$
- negativ semidefinit, falls $\langle Ax | x \rangle_2 \leq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$
- indefinit, falls $x, y \in \mathbb{R}^n$ existieren mit $\langle Ax | x \rangle_2 > 0 > \langle Ay | y \rangle_2$.

Satz (Kriterium für positive Definitheit)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch. Dann sind äquivalent:

(1) A ist positiv definit

(2) Alle Eigenwerte von A sind positiv

(3) $\det(A_r) > 0$ für $r = 1, 2, \dots, n$ mit den Hauptminoren $A_r := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{r\times r}$

Genauso sind äquivalent:

(1)' A ist negativ definit (2)' Alle EW von A sind negativ

(3)' $(-1)^r \det(A_r) > 0$ für $r = 1, 2, \dots, n$

Beweis: Die Äquivalenz von (1)'–(3)' folgt aus der Äquivalenz von (1)–(3), indem man A durch $-A$ ersetzt. Es gilt offenbar

A positiv definit $\iff$ $-A$ negativ definit

$[\det(-A_r) = (-1)^r \cdot \det(A_r)]$.