zu Beweis $\sigma(\varphi^*) = \overline{\sigma(\varphi)}$: Damit

$$\|(\varphi - \lambda\, id)x\|^2 = \langle (\varphi-\lambda\, id)x, (\varphi - \lambda\, id)x\rangle$$

$$= \langle x \,|\, (\varphi-\lambda\, id)^*(\varphi-\lambda\, id)x\rangle = \langle x \,|\, (\varphi-\lambda\, id)(\varphi-\lambda\, id)^* x\rangle$$

$$= \langle (\varphi-\lambda\, id)^* x \,|\, (\varphi-\lambda\, id)^* x\rangle = \|(\varphi-\bar{\lambda}\, id)x\|^2$$

□

$\Rightarrow$ Beh.

Korollar H Prähilbert, $\dim H < \infty$, $\varphi \in L(H,H)$ normal. Dann gilt: Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten von φ sind zueinander senkrecht.

Beweis: Sei v_1 ein EV von φ zum EW λ_1, und v_2 ein EV von φ zum EW $\lambda_2 \neq \lambda_1$ ~~(OE $\lambda_2 \neq 0$ sonst betrachte $(\varphi - \lambda\, id)$)~~

$$\Rightarrow \lambda_2 \langle v_1 | v_2\rangle = \cancel{\tfrac{1}{\lambda_2}} \langle v_1 | \varphi(v_2)\rangle =$$

$$= \cancel{\tfrac{1}{\lambda_2}} \langle \varphi^*(v_1) | v_2\rangle = \cancel{\tfrac{1}{\lambda_2}} \langle \bar{\lambda}_1 v_1 | v_2\rangle$$

$$= \lambda_1 \langle v_1 | v_2\rangle$$, d.h. falls $\langle v_1 | v_2\rangle \neq 0$

folgt $\cancel{\tfrac{\lambda_1}{\lambda_2} = 1}$ $\lambda_2 = \lambda_1$ ↯ □

Theorem (Spektralsatz)

Es sei H ein Prähilbertraum über $\mathbb{C}$, $\dim H < \infty$ und $\varphi \in L(H,H)$. Dann sind äquivalent:

(1) φ ist normal

(2) $\exists$ ONB aus Eigenvektoren von φ, dh φ ist bzgl. einer ONB diagonalisierbar.

Beweis: (2) $\Rightarrow$ (1): Sei $\mathcal{B}$ eine ONB von H derart, dass ${}_{\mathcal{B}}(\varphi)_{\mathcal{B}}$ Diagonal ist.

Bsp $\Rightarrow$ ${}_{\mathcal{B}}(\varphi)_{\mathcal{B}}$ ist eine normale Matrix

$\overset{\text{Satz}}{\Longrightarrow}$ $\varphi \in L(H,H)$ ist ebenfalls normal.

(1) $\Rightarrow$ (2): Da H ein $\mathbb{C}$-VR ist, hat φ einen Eigenwert, etwa $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ (FS der Algebra)

dh $\exists\ v_1 \in H \setminus \{0\}$ mit $\varphi(v_1) = \lambda_1 \cdot v_1$ (OE $\|v_1\| = 1$)

$\Rightarrow \varphi^*(v_1) = \overline{\lambda_1}\, v_1$.

Zu Beweis: d.h. $U_1 := \mathrm{Span}\{v_1\}$ ist φ-invariant und φ^*-invariant

$\overset{\text{Satz}}{\Longrightarrow}$ $U_1^\perp$ ist auch φ^*-invariant und φ-invariant

Damit ist ~~φ^*~~ ~~φ~~ $\varphi_1 := \varphi|_{U_1^\perp}$ auch normal ($\varphi_1^* = \varphi^*|_{U_1^\perp}$). Wende das obige Argument an auf $(\varphi_1, U_1^\perp)$ statt (φ, H)

$\rightsquigarrow$ Man erhält einen EV $v_2 \in U_1^\perp$ mit

$\varphi_1(v_2) = \varphi(v_2) = \lambda_2 v_2$, $\varphi_1^*(v_2) = \varphi^*(v_2) = \overline{\lambda_2} v_2$

$\|v_2\| = 1$ und $\langle v_1 | v_2 \rangle = 0$, denn $v_2 \in U_1^\perp$.

$\Rightarrow$ $U_2 := \mathrm{Span}\{v_1, v_2\}$ ist auch φ- und φ^*-invariant $\Rightarrow$ $U_2^\perp$ ist auch φ- und φ^*-invariant

Setzt man diesen Prozess fort, so bekommt man nach $(\dim H)$-Schritten eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren. $\square$

Korollar (Spektralsatz für Matrizen)

Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Dann sind äquivalent:

(1) A ist normal

(2) $\exists$ eine unitäre Matrix $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ~~mit~~ derart, dass Q^*AQ ~~hat~~ Diagonalgestalt hat.

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2): Sei $\mathcal{B}_0$ kanonische ONB von $\mathbb{C}^n$. A normal $\Leftrightarrow$ φ_A normal mit ${}_{\mathcal{B}_0}(\varphi_A)_{\mathcal{B}_0} = A$. Nach dem Spektral $\exists$ eine ONB $\mathcal{B}$ von $\mathbb{C}^n$ aus EV von φ_A, d.h.

$$\mathrm{diag}(\lambda_i) = {}_{\mathcal{B}}(\varphi_A)_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id})_{\mathcal{B}_0} \cdot {}_{\mathcal{B}_0}(\varphi_A)_{\mathcal{B}_0} \cdot {}_{\mathcal{B}_0}(\mathrm{id})_{\mathcal{B}}$$

$$= Q^* A Q \quad \text{mit} \quad Q := {}_{\mathcal{B}_0}(\mathrm{id})_{\mathcal{B}}.$$

Beachte Q ist unitär, da $\mathcal{B}, \mathcal{B}_0$ beides ONB sind

(2) $\Rightarrow$ (1): $D = \mathrm{diag}(\lambda_i)$ $A = QDQ^* \Rightarrow A^* = QD^*Q^*$

$$\Rightarrow A \cdot A^* = QD\underbrace{Q^*Q}_{E}D^*Q^* = QDD^*Q^* = QD^*DQ^* = QD^*Q^*QDQ^* = A^* \cdot A. \quad \square$$

Satz (Diagonalisierbarkeit von unitären ASL)

Es sei H ein Prähilbertraum über $\mathbb{C}$, $\dim H < \infty$ und $\varphi \in L(H,H)$. Dann sind äquivalent: (1) φ ist unitär

(2) $\exists$ ONB aus Eigenvektoren von φ und alle Eigenwerte haben Betrag 1.

Beweis: (2) $\Rightarrow$ (1) Sei $\mathcal{B}$ eine ONB von H derart, dass ${}_{\mathcal{B}}(\varphi)_{\mathcal{B}} = \cancel{(\lambda_{ij})}\ \mathrm{diag}(\lambda_i)$ mit $|\lambda_i| = 1 \ \forall i$.

$$\Rightarrow {}_{\mathcal{B}}(\varphi)_{\mathcal{B}}^* = {}_{\mathcal{B}}(\varphi^*)_{\mathcal{B}} = \mathrm{diag}(\overline{\lambda_i})$$

und ${}_{\mathcal{B}}(\varphi \circ \varphi^*)_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}(\varphi)_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}(\varphi)_{\mathcal{B}}^* = \mathrm{diag}(|\lambda_i|^2) = E$

$$= {}_{\mathcal{B}}(\varphi)_{\mathcal{B}}^* \cdot {}_{\mathcal{B}}(\varphi)_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}(\varphi^* \circ \varphi)_{\mathcal{B}}$$

${}_{\mathcal{B}}(\cdot)_{\mathcal{B}}$ ist bijektiv $\Rightarrow \varphi^* \circ \varphi = \mathrm{Id} = \varphi \circ \varphi^*$

Korollar zu Beweis unitär: ~~②~~ ① ⟹ ②:

Ist φ unitär so auch normal, dh

φ ~~Fn~~ Spektralsatz ⟹ $\exists$ ONB $\mathcal{B} = (v_1, .., v_n)$

von H aus Eigenvektoren von φ mit zugehörigen

Eigenwerten λ_i. Dann gilt $\forall i$

$$|\lambda_i|^2 = \langle \lambda_i v_i | \lambda_i v_i \rangle = \langle \varphi(v_i) | \varphi(v_i) \rangle$$

$$= \langle \varphi^* \circ \varphi(v_i) | v_i \rangle = \langle v_i | v_i \rangle = 1. \to ② \quad \square$$

Korollar (Unitäre Matrizen)

Für $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ sind äquivalent:

① A ist unitär,

② $\exists$ ein unitäres $Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ~~mit~~ derart, dass $Q^* A Q$ Diagonalgestalt hat und alle Diagonalelemente haben Betrag 1

Beweis wie im Fall A normal.

Beispiel: (1) Über $\mathbb{R}$ stimmt der Spektralsatz für normale Abb nicht, etwa:

$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ist normal, sogar unitär (orthogonal), denn Spalten bilden eine ONB von $\mathbb{R}^2$, aber A hat keine ~~Eigenwe~~ reellen Eigenwerte $\overset{t^2+1 \neq 0}{\Longrightarrow}$ nicht diagonalisierbar.

Satz (Selbstadjungierte Abb)

Sei H ein Prähilbertraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, $\dim H < \infty$, und $\varphi \in L(H,H)$. Dann sind äquivalent:

(1) φ ist selbstadjungiert

(2) $\exists$ eine ONB von H aus Eigenvektoren von φ und alle Eigenwerte sind reell.

zu Beweis selbstadj.: (2) $\Rightarrow$ (1):

Sei $\mathcal{B}$ eine ONB von H aus EV von φ und alle EW λ_i von φ seien reell $\Rightarrow$

$${}_{\mathcal{B}}(\varphi)_{\mathcal{B}} = \operatorname{diag}(\lambda_i) \quad \text{mit } \lambda_i \in \mathbb{R}$$

Also gilt $\;{}_{\mathcal{B}}(\varphi)_{\mathcal{B}}^{*} = {}_{\mathcal{B}}(\varphi)_{\mathcal{B}}^{*} = {}_{\mathcal{B}}(\varphi^*)_{\mathcal{B}}$

$\xRightarrow{{}_{\mathcal{B}}(\cdot)_{\mathcal{B}} \text{ bijektiv}} \quad \varphi = \varphi^*$

(1) $\Rightarrow$ (2): 1. Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:

φ ist ~~normal~~ selbstadjungiert, also auch normal $\xRightarrow[\text{Spektralsatz}]{} \exists$ ONB $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ aus EV von φ mit EW $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Es gilt $\lambda_i = \langle v_i | \lambda_i v_i \rangle = \langle v_i | \varphi(v_i) \rangle$

$= \langle \varphi(v_i) | v_i \rangle = \langle \lambda_i v_i | v_i \rangle = \overline{\lambda_i}$

$\Rightarrow \lambda_i \in \mathbb{R}$.

Zu Satz Beweis selbstadj : 2. Fall $\mathbb{K}=\mathbb{R}$:

Fixiere direkt eine ONB $\mathcal{B}_0$ von H, dann

${}_{\mathcal{B}_0}(\varphi)_{\mathcal{B}_0} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix.

Betrachte ${}_{\mathcal{B}_0}(\varphi)_{\mathcal{B}_0}$ als komplexe Matrix in

$\mathbb{C}^{n\times n}$ $\Rightarrow$ ${}_{\mathcal{B}_0}(\varphi)_{\mathcal{B}_0}$ ist hermitesch

$\Rightarrow$ $h := L_{{}_{\mathcal{B}_0}(\varphi)_{\mathcal{B}_0}} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ ist

selbstadjungiert

$\underset{\text{1. Fall.}}{\Rightarrow}$ ${}_{\mathcal{B}_0}(\varphi)_{\mathcal{B}_0}$ hat nur reelle Eigenwerte

und ~~ist bzgl. einer~~ es gibt eine ONB von $\mathbb{C}^n$ aus

Eigenvektoren von φ. Aber das

Gauss-Verfahren liefert in diesem Fall, da

${}_{\mathcal{B}_0}(\varphi)_{\mathcal{B}_0}$ nur reelle Koeffizienten hat und

$\lambda_i \in \mathbb{R}$ sind, Eigenvektoren mit reellen

Einträgen $\Rightarrow$ diese bilden also eine ONB von $\mathbb{R}^n$ $\square$