Satz (Charakterisierung von unitär)

Es sei H ein Prähilbertraum, $\dim H < \infty$ und $\varphi \in L(H,H)$. Dann sind äquivalent: ⚡

1. φ ist unitär
2. $\langle x | y \rangle = \langle \varphi(x) | \varphi(y) \rangle \quad \forall x, y \in H$ (d.h. φ ist eine Isometrie)
3. φ bildet Orthonormalbasen auf Orthonormalbasen ab.
4. φ bildet eine ONB auf eine ONB ab.

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2): $\langle \varphi(x) | \varphi(y) \rangle = \langle \varphi^* \varphi(x) | y \rangle$

$$\underset{\varphi^* \circ \varphi = id}{=} \langle x | y \rangle$$

(2) $\Rightarrow$ (3): Sei $\{v_1, .., v_n\}$ eine ONB von H

$\Rightarrow \langle \varphi(v_j) | \varphi(v_i) \rangle = \langle v_j | v_i \rangle = \delta_{ij}$

$\Rightarrow \{\varphi(v_1), .., \varphi(v_n)\}$ ONB von H

(3) $\Rightarrow$ (4): klar.

Zu Beweis charak unitär:

④ ⇒ ①: Sei $\{v_1, .., v_n\}$ eine ONB von H, derart, dass $\{\varphi(v_1), .., \varphi(v_n)\}$ wieder eine ONB ist.

$\Rightarrow$ (Basis auf Basis) φ ist invertierbar $\Rightarrow \exists \varphi^{-1} \in L(H, H)$

Sei $x \in H$ bel. $\Rightarrow$ $x = \sum_{i=1}^{n} \langle \varphi(v_i) | x \rangle \varphi(v_i)$,

da $\{\varphi(v_1), .., \varphi(v_n)\}$ eine ONB.

$$\Rightarrow \varphi^{-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle \varphi(v_i) | x \rangle v_i \overset{\text{Def.}}{=} \varphi^*(x) \quad \square$$

Koroller (Unitär für Matrizen)

Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Dann sind äquivalent:

① A ist unitär

② Die Spalten von A bilden eine ONB von $\mathbb{K}^n$

③ Die Zeilen von A bilden eine ONB von $\mathbb{K}^n$

Beweis: ① ⇔ ②: A unitär $\Leftrightarrow$ φ_A unitär mit $\varphi_A(x) := A \cdot x$ $\Leftrightarrow$ $\{\varphi_A(e_1), .., \varphi_A(e_n)\}$ ONB von $\mathbb{K}^n$ $\Leftrightarrow$ $\{Ae_1, .., A e_n\}$ $\hat{=}$ Spalten von A bilden ONB von $\mathbb{K}^n$

Zu Beweis Korollar unitär Matrix :

① $\Leftrightarrow$ ③ : wegen $(\varphi^*)^* = \varphi$ für $\varphi \in L(H,H)$

$\Rightarrow (\varphi_A^*) \circ (\varphi_A^*)^* = (\varphi_A^*)^* \circ \varphi_A^*$ ~~nicht~~ ~~$\Rightarrow \varphi^*$ unitär~~

Damit

① $\Leftrightarrow$ A^* ~~auch~~ unitär ~~(sogar A^* unitär $\Leftrightarrow A$ unitär)~~

$\Leftrightarrow$ $\{A^*(e_1), \dots, A^*(e_n)\}$ ist ein ONB von $\mathbb{K}^n$

d.h. $\{\overline{z_1}, \dots, \overline{z_n}\}$ ist eine ONB, wobei

z_i die i-te Zeile von A bezeichnet und $\overline{z_i}$

$\hat{=}$ alle Einträge von z_i komplex konjugiert

wegen $\langle z_i | z_j \rangle = \overline{\langle z_i | z_j \rangle} = \langle \overline{z_i} | \overline{z_j} \rangle$

folgt $\{\overline{z_1}, \dots, \overline{z_n}\}$ ONB $\Leftrightarrow \{z_1, \dots, z_n\}$ ONB.

$\square$

Beispiele ① (Trafomatrix von ONBs)

Schon gezeigt in Kapitel 5: Sind $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ zwei ONBs von H mit $\dim H < \infty$, so gilt für $S := {}_{\mathcal{B}_2}(\mathrm{id})_{\mathcal{B}_1}$: $S^{-1} = S^* \Rightarrow S$ unitär

Bsp (2): $Q := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

ist orthogonal, denn Spalten bilden ONB (Zeilen auch) $\Rightarrow Q^{-1} = Q^T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Bsp (3) (Orthogonale 2x2 Matrizen)

Sei $Q \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ orthogonal.

$\Rightarrow$ Erste Spalte von Q ist ein Einheitsvektor

d.h. $q_1 = \begin{pmatrix} \cos\gamma \\ \sin\gamma \end{pmatrix}$ mit $0 \le \gamma < 2\pi$

Spalten von Q bilden ONB $\Rightarrow q_2 \perp q$ $|q_2| = 1$

$\Rightarrow q_2 \in \left\{ \begin{pmatrix} -\sin\gamma \\ \cos\gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin\gamma \\ -\cos\gamma \end{pmatrix} \right\}$

Beide Fälle unterscheiden sich durch ihre Determinante: $\det\begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix} = 1$, $\det\begin{pmatrix} \cos & \sin\gamma \\ \sin\gamma & -\cos\gamma \end{pmatrix} = -1$

Falls $\det Q = 1$ (orientierungs erhaltend)

$Q = D(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix} \hat{=}$ Drehung um ~~bei~~ γ

Zu Bsp $O(2)$:

Falls $\det Q = -1 \Rightarrow Q = D(\gamma) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

dh. ~~Q(z)~~ $Q \cdot z = e^{i\gamma} \bar{z}$ mit $z = x_1 + i x_2$

also eine Spiegelung an der x_1-Achse mit anschließender Drehung um γ.

Bestimme EW, EV von Q: $\operatorname{Spur} Q = 0$, $\det Q = -1$

$\Rightarrow$ EW $Q = \{\pm 1\}$ Gesucht EV:

$\lambda = +1$ (Komplex $z = x_1 + i x_2$) $z = r \cdot e^{i\varphi} \neq 0$

$(r > 0,\ 0 \leq \varphi < 2\pi)$, $Q \cdot z = e^{i\gamma} \bar{z} \overset{!}{=} z$

$\Leftrightarrow$ ~~$e^{i\gamma} r e$~~ $e^{i\gamma} \cdot r \cdot e^{-i\varphi} \overset{!}{=} r \cdot e^{i\varphi}$

$\Leftrightarrow e^{i(\gamma - \varphi)} = e^{i\varphi} \Leftrightarrow \gamma - \varphi = \varphi + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow \varphi = \frac{\gamma}{2} + \pi k \quad (k \in \mathbb{Z})$

(Beachte $e^{i(\frac{\gamma}{2} + \pi k)} = e^{i\frac{\gamma}{2}} \cdot e^{i\pi k} = \pm e^{i\frac{\gamma}{2}}$)

$\Rightarrow$ Eigenraum $V_1(Q) = \{\lambda \cdot e^{i\frac{\gamma}{2}} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

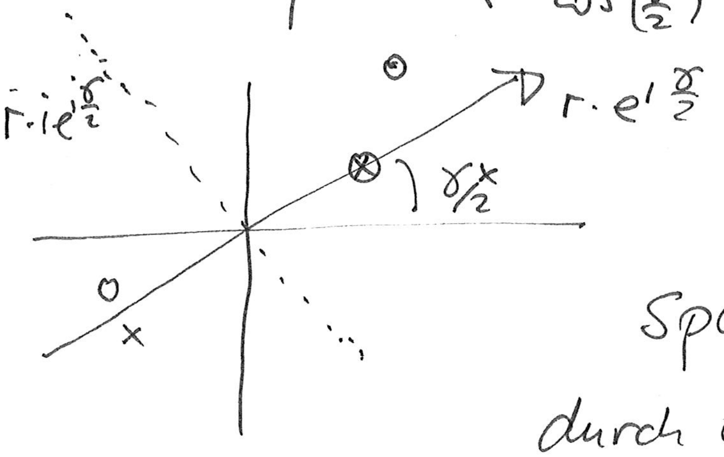
$= \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} \cos(\frac{\gamma}{2}) \\ \sin(\frac{\gamma}{2}) \end{pmatrix} \right)$

$\lambda = -1$ Analog $e^{i\gamma} \bar{z} \overset{!}{=} -z = e^{i\pi} \cdot z$

$\Leftrightarrow \varphi = \frac{\gamma}{2} + \frac{\pi}{2} + \pi k \quad k \in \mathbb{Z}$

zu Bsp $O(2)$ $\Rightarrow$ $V_{-1}(Q) = \{\lambda \cdot i e^{i\frac{\gamma}{2}} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

$= \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -\sin(\frac{\gamma}{2}) \\ \cos(\frac{\gamma}{2}) \end{pmatrix} \right\}$



$\rightarrow L_Q$ ist eine Spiegelung an der Gerade durch 0 aufgespannt von $e^{i\frac{\gamma}{2}}$.

Insgesamt Orthogonale Abb der Ebene $\mathbb{R}^2$ ~~(Isometrien)~~ sind entweder Drehungen um den Ursprung 0 oder Spiegelungen an einer Geraden durch 0, ~~sie unters~~

Drehungen haben Determinante $+1$, Spiegelungen Determinante -1,

Bsp 4 $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^* \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \neq$$

$\Rightarrow$ A ist nicht normal.

Bsp ⑤ (Diagonalmatrizen)

$A = \mathrm{diag}(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in K^{n \times n}$ ist

normal, denn $A^* = \mathrm{diag}(\overline{\lambda_i})$

und $A \cdot A^* = A^* A = \mathrm{diag}(\lambda_i \overline{\lambda_i})$

Bsp ⑥ (unitäre Matrizen => normal)

Ist Q unitär => Q ist normal, denn

$Q \cdot Q^* = E = Q^* \cdot Q$

Bsp ⑦ (hermitesche, schiefhermitesch } => normal)

Ist $A^* = \pm A$ => $A^* \cdot A = \pm A \cdot A = A^* A$

d.h. A ist normal.

Diagonalisierungssätze

Definition (φ-invariant) Es sei V ein $\mathbb{K}$-VR und $\varphi \in L(V,V)$. Ein Unterraum U von V heißt φ-invariant, falls $\varphi(U) \subseteq U$. In diesem Fall bezeichnen wir die Einschränkung von φ auf U durch $\varphi|_U \in L(U,U)$.

Satz (U φ-invariant $\Leftrightarrow$ $U^\perp$ φ^*-invariant)

Es sei H ein endl. dim Prähilbertraum, $U \subseteq H$ ein Unterraum und $\varphi \in L(H,H)$. Dann sind äquivalent:

(1) U ist φ-invariant

(2) $U^\perp$ ist φ^*-invariant

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2): Sei $u \in U$ und $v \in U^\perp$. $\Rightarrow \varphi(u) \in U$

$\Rightarrow 0 = \langle \varphi(u) | v \rangle = \langle u | \varphi^*(v) \rangle \overset{u \text{ bel.}}{\Rightarrow} \varphi^*(v) \in U^\perp$

zu Beweis $U^\perp$ φ^*-inv: d.h. $\varphi^*(U^\perp) \subseteq U^\perp$

(2) $\Rightarrow$ (1): wende (1) $\Rightarrow$ (2) auf ~~die~~ φ^* und $U^\perp$ an

$\Rightarrow$ $U = (U^\perp)^\perp$ ist $(\varphi^*)^* = \varphi$ - invariant $\square$

Lemma (EW von normalen φ } $\sigma(\varphi^*) = \overline{\sigma(\varphi)}$)

Sei H Prähilbert, $\dim H < \infty$, $\varphi \in L(H,H)$ normal

Für $x \in H \setminus \{0\}$ gilt

$$\varphi(x) = \lambda x \iff \varphi^*(x) = \overline{\lambda} x$$

dh φ und φ^* haben dieselben Eigenvektoren und zueinander komplex konjugierte Eigenwerte.

Beweis: Für $\lambda \in K$ gilt $(\varphi - \lambda \, id)^* = \varphi^* - \overline{\lambda} \, id$

und $(\varphi - \lambda \, id)^* \cdot (\varphi - \lambda \, id) = (\varphi - \lambda \, id)(\varphi - \lambda \, id)^*$

dh. $(\varphi - \lambda \, id)$ ist ebenfalls normal.