

Zu Beweis Adjungierte :

Eindeutigkeit Sei ψ eine weitere ~~lineare~~ Abb

mit $\langle \psi(x) | y \rangle = \langle x | \varphi(y) \rangle \quad \forall x, y \in H$

$\Rightarrow \langle \varphi^*(x) - \psi(x) | y \rangle = \langle \varphi^*(x) | y \rangle - \langle \psi(x) | y \rangle$

$= \langle x | \varphi(y) \rangle - \langle x | \varphi(y) \rangle = 0 \quad \forall x, y$

mit $y := \varphi^*(x) - \psi(x)$ gilt also

$0 = \langle \varphi^*(x) - \psi(x) | \varphi^*(x) - \psi(x) \rangle = \| \varphi^*(x) - \psi(x) \|^2$

$\Rightarrow \varphi^*(x) = \psi(x) \quad \forall x$

Sei $\;_{B}(\varphi)_{B} = (a_{ik})$, dh $\varphi(v_k) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} v_i$

$\Rightarrow \langle v_j | \varphi(v_k) \rangle = \langle v_j | \sum_{i=1}^{n} a_{ik} v_i \rangle = a_{jk}$

Damit $\varphi^*(v_k) = \sum_{i=1}^{n} \langle \varphi(v_i) | v_k \rangle v_i$

$= \sum_{i=1}^{n} \overline{\langle v_k | \varphi(v_i) \rangle} v_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{a_{ki}} v_i$

$\Rightarrow \;_{B}(\varphi^*)_{B} = \;_{B}(\varphi)_{B}^{*}$ ($\mathbb{R}$ analog) $\square$

Satz (Rechenregeln für $*$)

Es sei H ein Prähilbertraum und $\varphi, \psi \in L(H,H)$ ($\dim H < \infty$)
sowie $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Dann gilt:

(1) $(\alpha\varphi + \beta\psi)^* = \bar{\alpha}\varphi^* + \bar{\beta}\psi^*$

(2) $(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^*$

(3) $(\varphi^*)^* = \varphi$

(4) $\langle \varphi(x) | y \rangle = \langle x | \varphi^*(y) \rangle \quad \forall x, y \in H$

(5) Ist φ bijektiv, so auch φ^* mit

$$(\varphi^*)^{-1} = (\varphi^{-1})^*$$

Beweis: zu (1): Es gilt $\forall x, y \in H$

$$\langle (\bar{\alpha}\varphi^* + \bar{\beta}\psi^*)(x) | y \rangle = \langle \bar{\alpha}\varphi^*(x) | y \rangle + \langle \bar{\beta}\psi^*(x) | y \rangle$$

$$= \langle \varphi^*(x) | \alpha y \rangle + \langle \psi^*(x) | \beta y \rangle$$

$$= \langle x | \varphi(\alpha y) \rangle + \langle x | \psi(\beta y) \rangle = \langle x | (\alpha\varphi + \beta\psi)(y) \rangle$$

$$\overset{\text{Eind.}}{\Longrightarrow} \bar{\alpha}\varphi^* + \bar{\beta}\psi^* = (\alpha\varphi + \beta\psi)^*$$

<u>zu Beweis Regeln *</u> : <u>zu (2)</u> : $\forall x, y$ gilt:

$$\langle (\psi^* \circ \varphi^*)(x) | y \rangle = \langle \psi^*(\varphi^*(x)) | y \rangle$$

$$= \langle \varphi^*(x) | \psi(y) \rangle = \langle x | \varphi(\psi(y)) \rangle$$

$$= \langle x | (\varphi \circ \psi)(y) \rangle \overset{\text{Eind.}}{\Longrightarrow} \psi^* \circ \varphi^* = (\varphi \circ \psi)^*$$

<u>zu (3)</u> : $\langle (\varphi^*)^*(x) | y \rangle = \langle x | \varphi^*(y) \rangle$

$$= \overline{\langle \varphi^*(y) | x \rangle} = \overline{\langle y | \varphi(x) \rangle} = \langle \varphi(x) | y \rangle$$

$\overset{\text{Eind.}}{\Longrightarrow} (\varphi^*)^* = \varphi$.

<u>zu (4)</u> : folgt aus (3).

<u>zu (5)</u> : φ bijektiv $\Rightarrow$ φ Iso, dh es gilt

$$\varphi \circ \varphi^{-1} = id_H = \varphi^{-1} \circ \varphi$$

$$\overset{(2)}{\Longrightarrow} (\varphi^{-1})^* \circ \varphi^* = id_H^* \underset{\text{Eind}}{=} id_H = \varphi^* \circ (\varphi^{-1})^*$$

$\Rightarrow$ Beh $(\varphi^{-1})^* = (\varphi^*)^{-1}$. $\square$

<u>Bem:</u> ~~Gleich~~ Alle Regeln gelten analog auch für Matrizen $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$!!!!

Beispiele 1 $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 + x_1 \end{pmatrix}$$ Berechne φ^*:

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ kanonische ONB $\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \varphi^*(x) = \sum_{i=1}^{3} \langle \varphi(e_i) \mid x \rangle e_i$$

$$= \cancel{\sum_{i=1}^{3}} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x \right\rangle \cdot e_1 + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| x \right\rangle e_2$$

$$+ \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x \right\rangle e_3 = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

oder: $\quad {}_{\mathcal{B}}(\varphi)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow {}_{\mathcal{B}}(\varphi^*)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

d.h. $\quad \varphi^*\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}$

Bsp ②: Betrachte ~~$V_n := \{ \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kt$~~

$$V_n := \{ \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt) \mid a_k, b_k \in \mathbb{R} \}$$

den VR der trigonometrischen Polynome vom Grad $\leq n$ versehen mit dem SKP

$$\langle p, q \rangle_{L^2} := \int_{-\pi}^{+\pi} p(t)\, q(t)\, dt$$

Definiere $\varphi: V_n \longrightarrow V_n$ $\varphi(p) := p'$.

Berechne φ^*: $\langle p, \varphi(q) \rangle_{L^2} = \int_{-\pi}^{+\pi} p(t) \cdot q'(t)\, dt$

$$\underset{\text{part. Int.}}{=} \int_{-\pi}^{+\pi} -p'(t) \cdot q(t)\, dt + \underbrace{p \cdot q \Big|_{-\pi}^{+\pi}}_{=0} \quad 2\pi\text{-periodisch !!!}$$

$$= \langle -p', q \rangle_{L^2}$$

$$\Rightarrow \varphi^*(p) = -p' \in L(V_n, V_n).$$

Definition (normal, selbstadjungiert, unitär)

Sei $\varphi \in L(H, H)$ linear, $\dim H < \infty$

① φ heißt **normal**, falls gilt:

$$\varphi \circ \varphi^* = \varphi^* \circ \varphi$$

② φ heißt ~~sel~~ **selbstadjungiert** (**hermitesch**), falls gilt: $\varphi = \varphi^*$

③ φ heißt **unitär**, falls φ bijektiv ist mit $\varphi^* = \varphi^{-1}$

Für Matrizen $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ definieren wir

A ist normal [selbstadjungiert] {unitär}

$\Longleftrightarrow$ $L_A \in L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$ normal [selbstadj.] {unitär} ist, d.h.

(a) A normal $\Longleftrightarrow$ $A \cdot A^* = A^* \cdot A$

(b) A selbstadjungiert $\Longleftrightarrow$ $A^* = A$

(c) A unitär $\Longleftrightarrow$ $A^* = A^{-1}$

zu Def normal: Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sagt man auch

symmetrisch, statt selbstadjungiert und

orthogonal, statt unitär.

Lemma (Äquivalenz bzgl. ONB)

Sei $\varphi \in L(H, H)$ mit H Prähilbert, $\dim H < \infty$.

Dann sind äquivalent:

1. φ ist normal [selbstadj] {unitär}
2. $\forall$ ONB $\mathcal{B}$ von H gilt: ${}_{\mathcal{B}}(\varphi)_{\mathcal{B}} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist normal [selbstadj] {unitär}
3. $\exists$ ONB $\mathcal{B}$ von H mit: ${}_{\mathcal{B}}(\varphi)_{\mathcal{B}}$ ist normal [selbstadj] {unitär}

Beweis: Nur Fall normal (Rest Übung)

1 $\Rightarrow$ 2: Sei $\mathcal{B}$ eine ONB von H

ZZ: ${}_{\mathcal{B}}(\varphi)_{\mathcal{B}}^{*} \cdot {}_{\mathcal{B}}(\varphi)_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}(\varphi)_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}(\varphi)_{\mathcal{B}}^{*}$

LAP Kap 8

Zu Beweis Lemma Ȧ bzgl. ONB: Zu (1) $\to$ (2):

$$_{\mathcal{B}}(\varphi)_{\mathcal{B}}^{*} \cdot {}_{\mathcal{B}}(\varphi)_{\mathcal{B}} \underset{\mathcal{B}\text{ ONB}}{=} {}_{\mathcal{B}}(\varphi^{*})_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}(\varphi)_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}(\varphi^{*}\circ\varphi)_{\mathcal{B}}$$

$$\underset{\varphi\text{ normal}}{=} {}_{\mathcal{B}}(\varphi\circ\varphi^{*})_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}(\varphi)_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}(\varphi^{*})_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}(\varphi)_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}(\varphi)_{\mathcal{B}}^{*}$$

(2) $\Rightarrow$ (3) klar.

(3) $\Rightarrow$ (1): Sei also $\mathcal{B}$ eine ONB von H mit

$$_{\mathcal{B}}(\varphi)_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}(\varphi)_{\mathcal{B}}^{*} = {}_{\mathcal{B}}(\varphi)_{\mathcal{B}}^{*} \cdot {}_{\mathcal{B}}(\varphi)_{\mathcal{B}}$$

$$\xRightarrow{\text{Rechnung oben}} {}_{\mathcal{B}}(\varphi\circ\varphi^{*})_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}(\varphi^{*}\circ\varphi)_{\mathcal{B}}$$

$_{\mathcal{B}}(\cdot)_{\mathcal{B}}$ ist bijektiv von $L(H,H)$ nach $\mathbb{K}^{n\times n}$

$$\Rightarrow \varphi\circ\varphi^{*} = \varphi^{*}\circ\varphi. \qquad \square$$