Beispiel: $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$p_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 2 \\ 0 & 1-t \end{vmatrix} = (1-t)^2 \implies 1 \text{ ist}$$

der einzige EW von A mit $e_1 = 2$ algebraische Vielfachheit

Eigenvektor zu $\lambda_1 = 1$: $\quad (A - 1E)v = 0$

$$\iff \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v = 0 \iff v \in \operatorname{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Also ist die geometrische Vielfachheit $d_1 = 1 < 2 = e_1$.

A ist nicht diagonalisierbar, $d_1 = 1 < \dim \mathbb{R}^2 = 2$.

Wichtige Beobachtung $\quad (d_\lambda \leq e_\lambda)$

Für einen Eigenwert λ von $\varphi \in L(V,V)$ gilt: Die geometrische Vielfachheit d_λ ist kleiner oder gleich der algebraischen Vielfachheit e_λ,

denn seien $v_1, \dots, v_{d_\lambda}$ linear unabh. EV zum EW λ ergänze zu einer Basis $\mathcal{B}$ von V, $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_{d_\lambda}, w_1, \dots, w_m)$

$$\implies {}_{\mathcal{B}}(\varphi)_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & & & * \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ \hline & 0 & & * \end{array}\right) \implies p_\varphi(t) = (\lambda - t)^{d_\lambda} \cdot \tilde{p}(t)$$

$$\implies e_\lambda \geq d_\lambda.$$

Satz (Charakterisierung von Diagonalisierbarkeit)

Es sei V ein $\mathbb{K}$-VR mit $\dim V = n < \infty$ und $\varphi \in L(V,V)$. Dann sind äquivalent:

1. φ ist diagonalisierbar
2. Das charak. Polynom p_φ zerfällt in Linearfaktoren, dh. $p_\varphi(t) = (\lambda_1 - t)^{e_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda_k - t)^{e_k}$ mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$, und für jeden Eigenwert λ_j ist die geometrische Vielfachheit d_j gleich der algebraischen Vielfachheit e_j.

Beweis: Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die (paarw. versch.) EW von φ.

1 $\Rightarrow$ 2: $\exists$ $\mathcal{B}$ Basis aus EV mit geometrischen Vielfachheiten $d_1, \ldots, d_k$ $\quad$ (1 $\Leftrightarrow$ $\sum d_i = n$)

$$\Rightarrow {}_{\mathcal{B}}(\varphi)_{\mathcal{B}} = \begin{array}{c} \\ d_1\{ \end{array} \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1 \ddots \lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{\lambda_k \ddots \lambda_k} \end{pmatrix}$$
$$\hphantom{\Rightarrow {}_{\mathcal{B}}(\varphi)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \ddots \lambda_1 & & 0 & \end{pmatrix}} \underbrace{\hphantom{\lambda_k \ddots \lambda_k}}_{d_r}$$

$$\Rightarrow p_\varphi(t) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i - t)^{d_i} \underset{\text{Grad}(p_\varphi)}{\Longrightarrow} d_i = e_i \ \forall i$$

2 $\Rightarrow$ 1: $p_\varphi(t) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i - t)^{e_i}$ und $n = \sum_{i=1}^{k} e_i = \sum_{i=1}^{k} d_i$

$\Rightarrow$ 1 $\qquad \square$

Korollar ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) Ist V ein $\mathbb{C}$-VR und $\dim V = n < \infty$ und $\varphi \in L(V,V)$. Dann sind äquivalent:

1. φ ist diagonalisierbar
2. Für jeden EW λ_j von φ gilt: $e_{\lambda_j} = d_{\lambda_j}$.

Beweis: Über $\mathbb{C}$ zerfällt jedes Polynom in Linearfaktoren, also auch p_φ, nach dem Fundamentalsatz der Algebra $\square$

Trigonalisierung

Es gibt über $\mathbb{C}$ nicht diagonalisierbare Matrizen zB. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mit $p_A(t) = t^2$, dh $e_\lambda = 2$, aber $d_\lambda = 1$

denn $\text{Rang}(A - 0 \cdot E) = \text{Rang}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$

$\Rightarrow \dim \text{Kern}(A - 0 \cdot E) = \dim(\text{Kern} A) = 2 - 1 = 1 < 2$

Wir werden zeigen: Jede komplexe Matrix ist ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix!

Lemma Jede komplexe Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hat einen Eigenwert.

Beweis: $p_A(t)$ hat als komplexes Polynom vom Grad $n \geq 1$ immer eine Nullstelle, ~~(FSd~~ nach dem FS der Algebra $\Rightarrow \exists$ EW $\square$

Satz (Trigonalisierung von komplexen Matrizen)

Jede komplexe Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix, d.h. $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ invertierbar mit

$$A' := S^{-1} A S = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Beweis: (Induktion nach n) $n = 1$ $A = (a_{11})$ ✓

$n \to n+1$: Sei $A \in \mathbb{C}^{(n+1) \times (n+1)}$ und λ ein EW mit EV v ($\exists$ nach Lemma)

Ergänze v zu einer Basis $\mathcal{B} = (v, v_1, \dots, v_n)$ von $\mathbb{C}^{n+1}$.

Bew zu Beweis Trigo: Betrachte die Matrix

$T = {}_{B_0}(\mathrm{id})_B$ mit Spalten $(v, v_2, \dots, v_n)$

$$\Rightarrow \quad T^{-1}AT = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & * * \cdots * \\ \hline 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{array}\right), \text{ denn}$$

erste Spalte von $T^{-1}AT = (T^{-1}AT)\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots \\0\end{pmatrix} = T^{-1}Av$

$$= \lambda T^{-1}(v) = \lambda \cdot e_1 = \begin{pmatrix}\lambda\\0\\ \vdots \\0\end{pmatrix}$$

Nach IV $\exists$ Matrix $R \in \mathbb{C}^{n \times n}$ invertierbar mit

$R^{-1}BR$ hat obere Δ-Gestalt.

Definiere $R' := \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & R \\ 0 & \end{array}\right)$ invertierbar

(da ~~*B~~ $(R')^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & R^{-1} \end{array}\right)$)

$$\Rightarrow (R')^{-1}T^{-1}ATR' = (R')^{-1}\left(\begin{array}{c|c} \lambda & * \cdots * \\ \hline 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{array}\right)R'$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \lambda & * \cdots * \\ \hline 0 & \\ \vdots & R^{-1}BR \\ 0 & \end{array}\right) \text{ hat obere } \Delta\text{-Gestalt}$$

Kästchenmult.

$\Rightarrow$ Beh. gilt mit $S := TR'$ $\square$

Korollar (Trigonalisierung von $\varphi \in L_{\mathbb{C}}(V,V)$)

Sei V ein $\mathbb{C}$-VR mit $\dim_{\mathbb{C}} V < \infty$ und $\varphi \in L_{\mathbb{C}}(V,V)$.
Dann gibt es eine Basis $\mathcal{B}$ von V, so dass
${}_{\mathcal{B}}(\varphi)_{\mathcal{B}}$ obere Δ-Gestalt hat.

Beweis: Sei $\mathcal{A}$ eine Basis von V.

$\Rightarrow$ ${}_{\mathcal{A}}(\varphi)_{\mathcal{A}}$ ist ähnlich zu einer oberen Δ-Matrix $\Rightarrow$ $\exists\, S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit

$$S^{-1}\, {}_{\mathcal{A}}(\varphi)_{\mathcal{A}}\, S = A' = \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}$$

Betrachte $L := (\cdot)_{\mathcal{A}}^{-1} \circ L_S \circ (\cdot)_{\mathcal{A}} \in L(V,V)$

invertierbar ($L^{-1} = (\cdot)_{\mathcal{A}} \circ L_{S^{-1}} \circ (\cdot)_{\mathcal{A}}^{-1}$)

$\Rightarrow \mathcal{B} := \{ w_j := L(v_j) \mid j = 1, \dots, n \}$ Basis von V

mit $w_j = L(v_j) = (\cdot)_{\mathcal{A}}^{-1} L_S \cdot (\cdot)_{\mathcal{A}} v_j = (\cdot)_{\mathcal{A}}^{-1} L_S(e_j)$

$= (\cdot)_{\mathcal{A}}^{-1}(s^j) = \sum_{i=1}^{n} s_{ij} v_i$

s^j: j-te Spalte von S

$\Rightarrow {}_{\mathcal{A}}(id)_{\mathcal{B}} = S \Rightarrow A' = S^{-1}\, {}_{\mathcal{A}}(\varphi)_{\mathcal{A}}\, S$

$= {}_{\mathcal{B}}(id)_{\mathcal{A}}\, {}_{\mathcal{A}}(\varphi)_{\mathcal{A}}\, {}_{\mathcal{A}}(id)_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}(\varphi)_{\mathcal{B}}$ $\square$

Kapitel 8 Lineare Abbildungen in Prähilberträumen

Satz und Definition (Adjungierte)

Sei H ein Prähilbertraum mit einer Orthonormalbasis $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ sowie $\varphi : H \to H$ eine lineare Abbildung.

Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $\varphi^* : H \to H$ mit der Eigenschaft

$$\langle x \mid \varphi(y) \rangle = \langle \varphi^*(x) \mid y \rangle \quad \forall x, y \in H.$$

Diese heißt die zu φ adjungierte Abbildung.

Es gilt ${}_{\mathcal{B}}(\varphi^*)_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}(\varphi)_{\mathcal{B}}^*$ im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

und ${}_{\mathcal{B}}(\varphi^*)_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}(\varphi)_{\mathcal{B}}^T$ im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

(weitere Schreibweisen: φ^t)

(nur $\mathbb{K}=\mathbb{C}$)

Beweis: ~~Definiere~~ Es sei $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ eine ONB

definiere φ^* durch:

$$\varphi^*(x) := \sum_{i=1}^{n} \langle \varphi(v_i) | x \rangle v_i \qquad \forall x \in H$$

zeige φ^* ist linear: Seien $x,y \in H$, $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$

$$\varphi^*(\alpha x+\beta y) = \sum_{i=1}^{n} \langle \varphi(v_i) | \alpha x+\beta y \rangle v_i$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^{n} \langle \varphi(v_i) | x \rangle v_i + \beta \sum_{i=1}^{n} \langle \varphi(v_i) | y \rangle v_i$$

$$= \alpha \varphi^*(x) + \beta \varphi^*(y).$$

Außerdem $\langle \varphi^*(x) | y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \langle \varphi(v_i) | x \rangle v_i \middle| y \right\rangle$

$$= \sum_{i=1}^{n} \overline{\langle \varphi(v_i) | x \rangle} \langle v_i | y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x | \varphi(v_i) \rangle \langle v_i | y \rangle$$

$$= \left\langle x \middle| \sum_{i=1}^{n} \cancel{\varphi(v_i)} \langle v_i | y \rangle \varphi(v_i) \right\rangle$$

$$= \left\langle x \middle| \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \langle v_i | y \rangle v_i \right) \right\rangle = \langle x | \varphi(y) \rangle$$