LAP Kap 7

(Matrixpotenzen)

Bsp ④: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 9 \Rightarrow \text{EW } \lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = -2$$

Berechne EV $\rightsquigarrow$ $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zum EW $\lambda_1 = 4$

und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ zum EW $\lambda_2 = -2$

Trafomatrix $S := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow S^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

und $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Daher gilt:

$$A^n = S\,\underbrace{(S^{-1}AS)(S^{-1}AS)\cdot\ldots\cdot(S^{-1}AS)}_{n-\text{mal}}\cdot S^{-1}$$

$$= S\,(S^{-1}AS)^n S^{-1} = S \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}^n S^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= 2^{n-1} \begin{pmatrix} 2^n + (-1)^n & 2^n - (-1)^n \\ 2^n - (-1)^n & 2^n + (-1)^n \end{pmatrix}$$

Satz (EV zu versch. EW sind linear unabh.)

Es sei $\varphi \in L(V,V)$ und $\lambda_1, .., \lambda_k$ paarweise verschiedene Eigenwerte von φ mit zugehörigen Eigenvektoren $v_1, .., v_k$. Dann ~~sind~~ ist $\{v_1, .., v_k\}$ linear unabhängig.

Beweis: (Induktion nach k):

$k=1$: $v_1 \neq 0$ nach Def $\Rightarrow \{v_1\}$ lin. unabh. ✓

$k \to k+1$: Sei $\sum_{i=1}^{k+1} \mu_i v_i = 0$ (I)

$$0 = \varphi(0) = \sum_{i=1}^{k+1} \mu_i \varphi(v_i) = \sum_{i=1}^{k+1} \mu_i \lambda_i v_i \quad (II)$$

$$\Rightarrow 0 = \lambda_{k+1} \cdot (I) - (II) = \sum_{i=1}^{k} \mu_i (\lambda_{k+1} - \lambda_i) v_i$$

$$\overset{IV}{\Rightarrow} \mu_i (\underbrace{\lambda_{k+1} - \lambda_i}_{\neq 0}) = 0 \quad \forall i = 1, .., k$$

$$\Rightarrow \mu_i = 0 \quad \forall i \in \{1, ..., k\} \underset{v_{k+1} \neq 0}{\overset{(I)}{\Rightarrow}} \mu_{k+1} = 0$$

$$\Rightarrow \mu_1 = ... = \mu_{k+1} = 0 \quad \Rightarrow \text{Beh.} \quad \square$$

Korollar ($\sum_{i=1}^{k} d_i = n \Longleftrightarrow$ diagonalisierbar)

Es sei V ein $\mathbb{K}$-VR mit $\dim V = n$ und $\varphi \in L(V,V)$ mit den paarweise verschied. Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.

Dann gilt: (1) $\sum_{i=1}^{k} d_i \leq n$ (d_i geom. Vielfach $= \dim V_{\lambda_i}(\varphi)$)

(2) φ ist diagonalisierbar $\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{k} d_i = n$

(a) φ hat höchstens n paarverschieden EW

Insbesondere: Korl.(b) φ diagonalisierbar, falls φ n ~~verschiedene~~ paarweise verschiedene EW besitzt.

~~und φ hat höchstens~~

Beweis: Jeder Eigenraum $V_{\lambda_i}(\varphi)$ $(i=1,\dots,k)$ besitzt eine d_i-elementige Basis. $\mathcal{B}_i = (v_{1i}, \dots, v_{d_i i})$

Nehmen wir alle diese Basen zusammen, erhalten wir ein linear unabhängiges System von Vektoren $\mathcal{B} := \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{B}_i$, denn sei

$$0 = \sum_{i=1}^{k} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{d_i} \mu_{ij} v_{ji} \right)}_{\in V_{\lambda_i}(\varphi)} \underset{\text{EV zu versch EW}}{\Longrightarrow} 0 = \sum_{j=1}^{d_i} \mu_{ij} v_{ji} \quad \forall i=1,\dots k$$

$$\underset{\mathcal{B}_i \text{ Basis}}{\Longrightarrow} \mu_{ij} = 0 \quad \forall i,j.$$

Zu Beweis Korollar:

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{k} d_i = \# \mathcal{B} \leq n = \dim V$$

Falls $\sum_{i=1}^{k} d_i = n \Rightarrow \mathcal{B}$ ist Basis von V aus EV $\Rightarrow \varphi$ diagonalisierbar.

Ist φ diagonalisierbar $\Rightarrow \exists$ Basis aus EV von V. Fassen wir die EV zum gleichen EW λ_i zusammen, so erhalten wir ein linear unabh. System in V_{λ_i} $\Rightarrow n \leq \sum_{i=1}^{k} d_i \underset{(1)}{\leq} n \Rightarrow$ "=" $\square$

Beispiel Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ ist diagonalisierbar, denn Eigenwerte von A sind: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 4-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix}$

$= (1-\lambda)\cdot(4-\lambda)\cdot(6-\lambda) \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 6.$

dh. A besitzt 3 verschiedene EW

$\overset{\text{Korollar}}{\Longrightarrow}$ A ~~dig~~ diagonalisierbar.

Satz und Definition (charakteristisches Polynom)

Es sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{K}$-VR, $\dim V = n$, und $\varphi \in L(V,V)$. Wir definieren das charakteristische Polynom p_φ von φ durch $p_\varphi(t) := \det(\varphi - t \cdot id_V)$

$= \det({}_{\mathcal{B}}(\varphi)_{\mathcal{B}} - t \cdot E)$ wobei $\mathcal{B}$ eine (beliebige) Basis von V bezeichnet.

Das Polynom $p_\varphi \in \mathbb{K}[t]$ hat den Grad n mit $p_\varphi(t) = (-1)^n t^n + (-1)^{n-1} \operatorname{Spur}(\varphi) t^{n-1} + \ldots$
$\ldots + \det(\varphi)$

Die Nullstellen von p_φ sind genau die Eigenwerte von φ. Für $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ setze $\varphi_A := \varphi_{L_A}$.

Beweis: Wähle eine Basis $\mathcal{B}$ von V.

und sei ${}_{\mathcal{B}}(\varphi)_{\mathcal{B}} = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$

$$\Rightarrow \quad p_\varphi(t) = \begin{vmatrix} a_{11}-t & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-t & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & & & a_{nn}-t \end{vmatrix}$$

zu Beweis p_φ !

$$p_\varphi \underset{\text{Leibniz}}{=} (a_{11}-t)\cdot(a_{22}-t)\cdot \ldots \cdot(a_{nn}-t)$$

$+$ Produkte mit höchstens $(n-2)$ Faktoren vom Typ $(a_{ii}-t)$

$$= (-1)^n t^n + (-1)^{n-1} t^{n-1}\cdot\Big(\underbrace{\sum_{i=1}^n a_{ii}}_{\text{Spur}(\varphi)}\Big)$$

$+$ Terme niedrigeren Grades

$p_\varphi(0) = \det(\varphi)$ liefert den Koeffizienten der Ordnung 0 in $p_\varphi(t)$. □

Beobachtung: 1 ($p_A(t)$ für $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$)

Ist $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und ~~fas~~ betrachten wir die zugehörige lineare Abb $L_A: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, x \to A\cdot x$

$$\Rightarrow \quad p_A(t) = \det(A - tE) \in \mathbb{K}[t]$$

Die Invarianz des charakteristischen Polynoms unter Basiswechsel ~~bead~~ bedeutet für Matrizen: Ist B ähnlich zu A, d.h. $B = S^{-1}AS$, so gilt $p_B = p_A$.

zu Beobachtung $p_A(t)$:

Insbesondere haben ähnliche Matrizen die gleichen Eigenwerte. Die Invarianz kann man auch direkt zeigen:

$$p_B(t) = \det(B - tE) = \det(S^{-1}AS - tE)$$
$$= \det(S^{-1}(A - tE)S) = \det(S^{-1})\det(A-tE)\det(S)$$
$$= \det(S)^{-1}\, p_A(t)\, \det(S) = p_A(t).$$

Erinnerung Polynomdivision

Sind $p, q \in \mathbb{K}[t]$ mit $q \neq 0$, so existieren eindeutig bestimmte Polynome $r, s \in \mathbb{K}[t]$ mit

$p = s \cdot q + r$ und $\mathrm{Grad}(r) < \mathrm{Grad}(q)$

Das Polynom r heißt Rest von p bei Division durch q. Das Polynom q heißt Teiler von p, wenn $r = 0$ ist. In diesem Fall schreibe $s = \frac{p}{q}$.

LAP Kap 7

Definition (Nullstelle mit Vielfachheit)

Es sei $p \in \mathbb{K}[t]\setminus\{0\}$ ein Polynom und $\lambda \in \mathbb{K}$ eine Nullstelle von p (d.h. $p(\lambda)=0$)

Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes $p_1 \in \mathbb{K}[t]$ mit $\mathrm{Grad}(p_1) = \mathrm{Grad}(p) - 1$ und $p(t) = (t-\lambda)p_1(t)$ (via Polynomdivision durch $(t-\lambda)$).

Ist $p_1(\lambda) \neq 0$, so heißt λ einfache Nullstelle von p.

Falls $p_1(\lambda) = 0$, gibt es $p_2 \in \mathbb{K}[t]$ mit $\deg(p_2) = \deg(p) - 2$ und $p(t) = (t-\lambda)^2 p_2(t)$

Iterativ erhalten wir $s \in \mathbb{N}$ und $p_s \in \mathbb{K}[t]$ mit $p(t) = (t-\lambda)^s p_s(t)$ und $p_s(\lambda) \neq 0$

Wir nennen λ dann eine Nullstelle der Vielfachheit s.

Definition (algebraische Vielfachheit)

Sei V ein $\mathbb{K}$-VR, $\dim V < \infty$, $\varphi \in L(V,V)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von φ. Die Vielfachheit e_λ von λ als Nullstelle von p_φ heißt algebraische Vielfachheit des EW λ von φ.