Kapitel 7 Eigenvektoren und Eigenwerte

Beispiel und Wiederholung

Betrachte $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linear mit

$$\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y \\ \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y \end{pmatrix}$$

Frage: Was ist $\varphi^{15}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\varphi \circ \ldots \circ \varphi}_{15\text{-mal}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

oder $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$??!

ZB: $\varphi^2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \varphi\begin{pmatrix} \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y \\ \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{8}x + \frac{3}{8}y \\ \frac{3}{8}x + \frac{5}{8}y \end{pmatrix}$

Matrix-version: Basis $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Kanonisch $\longrightarrow$ ${}_{\mathcal{B}}(\varphi)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \; {}_{B}(\varphi^2)_{B} = {}_{B}(\varphi \circ \varphi)_{B} = {}_{B}(\varphi)_{B} \cdot {}_{B}(\varphi)_{B}$$

$= {}_{B}(\varphi)_{B}^{2}$ bzw allgemein ${}_{B}(\varphi^n)_{B} = {}_{B}(\varphi)_{B}^{n}$

Gesucht: ${}_{B}(\varphi)_{B}^{15} = {}_{B}(\varphi^{15})_{B}$

z.B. $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}$

Trick: Wähle ~~be~~ eine bessere Basis!

$$\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Später: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Eigenvektor zum Eigenwert 1

und $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert $-\frac{1}{2}$

Mit $\tilde{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ gilt also

$$\cancel{E} \; {}_{\tilde{B}}(\varphi)_{\tilde{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

LAP Kap 7

zu Bsp: $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \varphi\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\varphi\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\varphi\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

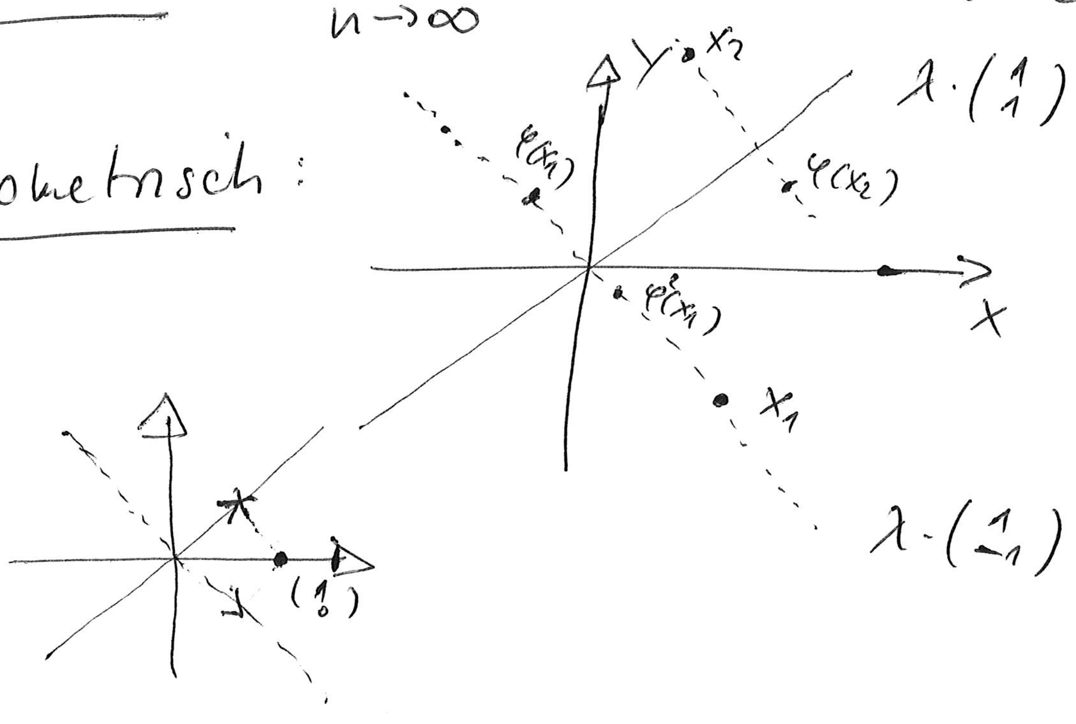
dh $\forall n\in\mathbb{N}$: $\varphi^n\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cdot 1^n\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)^n\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

insbesondere: $\varphi^{15}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \left(\frac{1}{2}\right)^{16}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{16}\\ \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{16}\end{pmatrix}$$

außerdem: $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi^n\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

geometrisch:



zu Bsp: Wie kommt man auf 1 und $-\frac{1}{2}$?

und $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$?

Lösen des LGS: $\varphi(v) = \lambda \cdot v$, dh.

mit B kanonischer Basis löse

$$\left({}_B(\varphi)_B - \lambda E \right) \cdot (v)_B = 0 \qquad (*)$$

$(*)$ hat natürlich $\forall \lambda$ immer die Lösung $(v)_B = 0$, die ist nicht interessant.

$\rightsquigarrow$ nur interessant Lsg $(v)_B \neq 0$

~~Hat~~ Hat also $(*)$ für λ eine nichttriviale Lösung $\Rightarrow$ $\det\left({}_B(\varphi)_B - \lambda E \right) = 0$

In unserem Fall ~~a~~:

$$0 \overset{!}{=} \det \begin{pmatrix} \frac{1}{4}-\lambda & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4}-\lambda \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{4}-\lambda\right)^2 - \frac{9}{16}$$

$$= \lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2} \qquad \text{Lsg } \lambda_{1,2} = \frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}$$

$\Rightarrow$ Löse $(*)$ für $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$

$\underline{\lambda_1 = 1}$: $\left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$\overset{\text{Gauß}}{=} \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$= \operatorname{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (v_1)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist EV.

$\underline{\lambda_2 = -\frac{1}{2}}$ $\left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$= \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$= \operatorname{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow (v_2)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist EV.

Definition (Eigenvektoren und Eigenwerte)

(1) Es sei V ein $\mathbb{K}$-VR und $\varphi: V \to V$ linear.
Ein Element $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt Eigenwert von φ, wenn es $v \in V \setminus \{0\}$ ($v \neq 0$) gibt mit $\varphi(v) = \lambda \cdot v$, und jeder Vektor $v \neq 0$, der diese Gleichung erfüllt, heißt Eigenvektor von φ zum Eigenwert λ.

Der Unterraum $V_\lambda := V_\lambda(\varphi) := \operatorname{Kern}(\varphi - \lambda \, id_V)$ $= \{ v \in V \mid \varphi(v) = \lambda \cdot v \}$ heißt Eigenraum von φ zum Eigenwert λ

(Beachte V_λ ist als Kern immer ein Unterraum)

Die Dimension d_λ von V_λ, $d_\lambda := \dim V_\lambda$, heißt geometrische Vielfachheit des Eigenwerts λ.

LAP Kap 7

<u>zu Def EW/EV</u>. Damit ist $\lambda \in \mathbb{K}$ genau dann ein Eigenwert von φ, falls $V_\lambda(\varphi) \neq \{0\}$ d.h. falls $d_\lambda \geq 1$ gilt.

In diesem Fall ist $V_\lambda(\varphi) \setminus \{0\}$ die Menge aller Eigenvektoren zum Eigenwert λ.

Die Abbildung φ heißt <u>diagonalisierbar</u>, wenn V eine Basis $\mathcal{B}$ aus Eigenvektoren von φ besitzt, d.h. wenn es eine Basis $\mathcal{B}$ gibt derart, dass $I_{\mathcal{B}}(\varphi)_{\mathcal{B}}$ <u>Diagonalgestalt</u> hat.

2 Für $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ betrachten wir $\varphi_A : L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$ definiert durch $\varphi_A(x) := A \cdot x$

Ein Element $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt <u>Eigenwert von A</u>, wenn $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von φ_A ist, d.h. wenn $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ existiert mit

$$A \cdot x = \lambda \cdot x$$

Zu Def EW/EV: Entsprechend heißt

$$\operatorname{Kern}(\varphi_A - \lambda \, id_{\mathbb{K}^n}) = \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = \lambda x\}$$

der Eigenraum von A zum Eigenwert λ

Alle weiteren Aussagen/Definitionen übertragen sich analog auf Matrizen, etwa: $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißt diagonalisierbar, falls φ_A diagonalisierbar ist.

Satz (charakteristische Gleichung)

(1) Für $\varphi \in L(V,V)$ mit $\dim V < \infty$ gilt:

λ ist EW von φ $\Longleftrightarrow$ $\det(\varphi - \lambda \, id) = 0$

(2) Für $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gilt:

λ ist EW von A $\Longleftrightarrow$ $\det(A - \lambda E) = 0$

Die letzte Formel heißt auch charakteristische Gleichung.

Beweis charak. Gl: zu (1):

Sei λ EW von $\varphi \iff \operatorname{Kern}(\varphi - \lambda \mathrm{id}) \neq \{0\}$

$\iff (\varphi - \lambda \mathrm{id})$ nicht injektiv

$\underset{\substack{\dim V < \infty \\ \text{Dim Formel}}}{\iff} (\varphi - \lambda \mathrm{id})$ nicht bijektiv

$\iff \det(\varphi - \lambda \mathrm{id}) = 0$

zu (2): λ EW von A

$\underset{\text{wie (1)}}{\iff} (A - \lambda E)$ ist nicht invertierbar

$\iff \det(A - \lambda E) = 0$ $\square$

Beispiele: (1) $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$. $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ kanonisch

$0 \overset{!}{=} \det(\varphi - \lambda \mathrm{id}) = \det\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right]$

$= \det\left[\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}\right] = \lambda^2$

zu Bsp 1 : $\Rightarrow$ $\lambda = 0$ ist der einzige Eigenwert von φ. Berechne EV:

$$V_0(\varphi) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \varphi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$\Rightarrow$ $d_0(\varphi) = 1$ mit Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ φ ist nicht diagonalisierbar

2 $A := \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ (Bsp vom Anfang)

charak. Gl: $0 = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} \frac{1}{4}-\lambda & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4}-\lambda \end{vmatrix}$

$= \lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}$ mit EW $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$

und $V_1(A) = \operatorname{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V_{-\frac{1}{2}}(A) = \operatorname{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Die EV v_1 und v_2 sind linear unabhängig

$\Rightarrow$ (v_1, v_2) ist eine Basis aus EV

$\Rightarrow$ A ist diagonalisierbar

Also gilt für $\varphi_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\varphi_A\binom{x}{y} := A \cdot \binom{x}{y}$, die durch die Matrix A bzgl. der kanonischen Basis $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2)$ gegebenen Abbildung, ${}_{\mathcal{B}}(\varphi_A)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} =: A'$

mit $\mathcal{B} = \{ \binom{1}{1}, \binom{1}{-1} \}$ (diagonalisierbar)

Mit Hilfe der Transformationsmatrix

$$S := {}_{\mathcal{B}_0}(\mathrm{id})_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

gilt daher $A' = {}_{\mathcal{B}}(\varphi_A)_{\mathcal{B}}$

$$= {}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id})_{\mathcal{B}_0} \, {}_{\mathcal{B}_0}(\varphi_A)_{\mathcal{B}_0} \, {}_{\mathcal{B}_0}(\mathrm{id})_{\mathcal{B}} = S^{-1} A S$$

dh. A ist diagonalisierbar

$\Longleftrightarrow$ A ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix.

Bsp 3 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2+1$

hat keine reelle Nullstelle $\Rightarrow$ keine EW.

Bsp 4 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Charak Gl: $0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2+1 = (\lambda-i)(\lambda+i)$

$\Rightarrow$ Eigenwerte $\lambda_1 = i$ und $\lambda_2 = -i$

$\Rightarrow$ Lösen der LGS liefert Eigenvektoren

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ zum EW $+i$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

zum EW $-i$ mit $V_{\pm i}(A) = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}\right\}$

v_1 und v_2 sind linear unabh. über $\mathbb{C}$

$\Rightarrow$ $\mathcal{B}' := \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}\right\}$ Basis von $\mathbb{C}^2$

und mit $S := {}_{B_0}(\mathrm{id})_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$ $B_0 = (e_1, e_2)$

gilt $S^{-1} A S = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ diagonalisierbar