Beispiele (1) **Drehungen in $\mathbb{R}^2$**:

D_α Drehung um α (komplex $z \mapsto e^{i\alpha} \cdot z$)

$\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2)$, $\mathcal{B}_1 = (e_2, e_1)$

$${}_{\mathcal{B}_0}(D_\alpha)_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos(\alpha) \end{pmatrix}, \quad {}_{\mathcal{B}_0}(\mathrm{id})_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow {}_{\mathcal{B}_1}(\mathrm{id})_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$${}_{\mathcal{B}_1}(D_\alpha)_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$\det(D_\alpha) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

$\mathrm{Spur}(D_\alpha) = 2\cos\alpha$.

(2) Für $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und $L_A \in L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$

gilt $\det(L_A) = \det(A)$ und

~~det~~ $\mathrm{Spur}(L_A) = \mathrm{Spur}(A)$ mit Hilfe

der kanonischen Basis.

Satz (Vorgabe auf einer Basis)

Seien V und W $\mathbb{K}$-VR und $\{v_1, .., v_n\} =: \mathcal{A}$ eine Basis von V. Dann gilt:

① Für alle $w_1, .., w_n \in W$ gibt es genau ein $A \in L(V, W)$ mit $A(v_i) = w_i \; \forall i = 1, ..., n$

② Ist $\mathcal{B} = \{w_1, .., w_m\}$ eine Basis von W, so ist die Abb. ${}_{\mathcal{B}}(\cdot)_{\mathcal{A}} : L(V, W) \longrightarrow \mathbb{K}^{m \times n}$ bijektiv (d.h. ein Isomorphismus von $\mathbb{K}$-Vektorräumen)

Definition (Isomorphismus, isomorph)

Eine Abbildung $A : V \to W$ zwischen $\mathbb{K}$-VR V und W heißt Isomorphismus, falls A linear und bijektiv ist. V und W heißen in diesem Fall isomorph.

<u>Beweis Vorgabe Basis:</u> <u>zu 1:</u> Definiere

$$A(v) := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i \quad , \text{ wobei } v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

die eindeutige Darstellung von v bzgl. $\mathcal{A}$ ist.

Dann gilt: $\quad A(v_i) = w_i \quad \forall i$ nach Def.

<u>zz:</u> A <u>ist linear</u>: Sei $v_1, v_2 \in V$ und $\mu_1, \mu_2 \in K$

$$\Rightarrow \quad v_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \quad \text{und} \quad v_2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

$$\Rightarrow \quad \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 = \sum_{i=1}^{n} (\mu_1 \lambda_i + \mu_2 \alpha_i) v_i \quad , \text{d.h.}$$

$$A(\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2) = \sum_{i=1}^{n} (\mu_1 \lambda_i + \mu_2 \alpha_i) w_i$$

$$= \mu_1 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i + \mu_2 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i = \mu_1 (A(v_1)) + \mu_2 A(v_2)$$

$\Rightarrow$ Existenz von A.

<u>Eindeutigkeit:</u> Sei $B \in L(V, W)$ mit $B(v_i) = w_i \ \forall i$

und $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \in V$ beliebig $\Rightarrow$

$$B(v) = B\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i B(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i$$

$$= A(v) \qquad \Rightarrow A = B.$$

Zu Beweis Vorgabe: zu ②: zz: ${}_{\mathcal{B}}(\cdot)_{\mathcal{A}}$ bijektiv,

Injektiv: zeige $\operatorname{Kern}{}_{\mathcal{B}}(\cdot)_{\mathcal{A}} = \{0\}$:

Sei $A \in L(V,W)$ mit ${}_{\mathcal{B}}(A)_{\mathcal{A}} = (0) \in \mathbb{K}^{m \times n}$,

d.h. $A(v_i) = 0 \ \forall i \overset{\text{eind.}}{\underset{①}{\Longrightarrow}} A = 0 \in L(V,W)$.

Surjektiv: Sei $(a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m\times n}$ gegeben

Definiere $\tilde{w}_j := \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \in W$

für $j = 1, \dots, n$

$\underset{\text{Existenz}}{\overset{①}{\Longrightarrow}} \exists A \in L(V,W)$ mit $A(v_j) = \tilde{w}_j \ \forall j$

$\Longrightarrow$ nach Def ${}_{\mathcal{B}}(A)_{\mathcal{A}} = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m\times n}$ □

Satz (Iso $\Longleftrightarrow$ Basis auf Basis)

Seien V, W $\mathbb{K}$-VR endl, $A \in L(V,W)$ und $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V. Dann sind äquivalent:

① A ist ein Isomorphismus (d.h. bijektiv)

② $(Av_1, \dots, Av_n)$ ist eine Basis von W

Insbesondere haben isomorphe Räume die gleiche Dimension!

~~zu~~ Beweis Satz Iso:

(1) $\Rightarrow$ (2): zz: $(A(v_1), \dots, A(v_n))$ ist eine Basis von W:

Sei $0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i A(v_i) = A\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i\right)$

$\underset{A \text{ bijektiv}}{\Longrightarrow} 0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \underset{\mathcal{B} \text{ Basis}}{\Longrightarrow} \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$

$\Rightarrow (A(v_1), \dots, A(v_n))$ ist linear unabh.

(2) ~~$\Rightarrow$ (1)~~ Sei $w \in W$ beliebig $\underset{A \text{ bijektiv}}{\Longrightarrow} \exists\, v \in V$ mit $A(v) = w$ und $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$

$\Rightarrow w = A(v) = \sum_{i=1}^n \lambda_i A(v_i) \in \operatorname{Span}(A(v_1), \dots, A(v_n))$

$\Rightarrow W = \operatorname{Span}(A(v_1), \dots, A(v_n))$ und die Beh. $\square$

(2) $\Rightarrow$ (1): zz: A ist surjektiv:

Sei $w \in W \underset{(2)}{\Longrightarrow} w = \sum_{i=1}^n \lambda_i A(v_i) = A\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i\right)$

$\Rightarrow$ A surjektiv

zz: A ist injektiv: Sei $v \in V$ mit $A(v) = 0$

$\Rightarrow v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ und $0 = A(v) = \sum_{i=1}^n \lambda_i A(v_i)$

$\underset{(2)}{\Longrightarrow} \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow \ker A = \{0\}$ $\square$

Korollar ($\dim(L(V,W)) = m \cdot n$)

Seien V, W $\mathbb{K}$-VR mit $\dim V = n < \infty$ und $\dim W = m < \infty$ und Basen $\mathcal{A}$ $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von V und $\mathcal{B}$ $\{w_1, \ldots, w_m\}$ von W. Dann gilt:

$\dim(L(V,W)) = m \cdot n$ und eine Basis von $L(V,W)$ ist gegeben durch

$\{\tilde{E}_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ mit

$\tilde{E}_{ij}(v_j) := w_i \qquad \tilde{E}_{ij}(v_k) = 0 \quad \forall k \neq j$

(dh. $\tilde{E}_{ij}(v_k) = \delta_{kj} \cdot w_i$)

Beweis: Nach Satz "Vorgabe" gilt

${}_{\mathcal{B}}(\cdot)_{\mathcal{A}} : L(V,W) \to \mathbb{K}^{m \times n}$ ist ein Iso

$\Rightarrow \dim(L(V,W)) = \dim(\mathbb{K}^{m \times n}) = m \cdot n$

und ${}_{\mathcal{B}}(\cdot)_{\mathcal{A}}^{-1}$ ebenfalls Iso, dh.

$\tilde{E}_{ij} := {}_{\mathcal{B}}(\cdot)_{\mathcal{A}}^{-1}(E_{ij})$ ist eine Basis von $L(V,W)$ $\square$

Korollar ($V \cong \mathbb{K}^{\dim V}$)

Sei V ein $\mathbb{K}$-VR mit $\dim V = n$ und W ein weiterer $\mathbb{K}$-VR. Dann sind äquivalent:

(1) $\dim W = \dim V = n$

(2) V und W sind isomorph ($V \cong W$)
(dh $\exists$ Iso von V nach W)

Insbesondere ist V isomorph zu $\mathbb{K}^n$.

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2): Wähle Basen $\mathcal{A} = \{v_1, .., v_n\}$ von V und $\mathcal{B} = \{w_1, .., w_n\}$ von W

$\overset{\text{Vorgabe}}{\Longrightarrow}$ $\exists$ $A \in L(V,W)$ mit $A(v_i) = w_i$ $i = 1, .., n$

$\overset{\text{Iso}}{\Longrightarrow}$ ($\{A(v_1), .., A(v_n)\}$ Basis von W) A ist ein Iso.

$\Rightarrow$ $V \cong W$.

(2) $\Rightarrow$ (1): Gilt $V \cong W$ $\Rightarrow$ $\dim(V) = \dim(W) = n$.

Für $W = \mathbb{K}^n$ mit kanonischer Basis $(e_1, .., e_n)$ ist ein Iso explizit durch $(\cdot)_{\mathcal{A}} : V \to \mathbb{K}^n$
$v \mapsto (v)_{\mathcal{A}}$ Koordinatenvektor bzgl. $\mathcal{A}$ gegeben! $\square$

Satz (A Iso $\Longleftrightarrow$ ${}_{\mathcal{B}}(A)_{\mathcal{A}}$ invertierbar)

Seien V und W $\mathbb{K}$-VR mit $\dim V = n$ und $\dim W = m$ und Basen $\mathcal{A}$ von V und $\mathcal{B}$ von W sowie $A \in L(V, W)$.

Dann sind äquivalent:

(1) A ist ein Isomorphismus

(2) $\overset{m=n}{\checkmark}$ ${}_{\mathcal{B}}(A)_{\mathcal{A}}$ ist invertierbar

In diesem Fall gilt: ${}_{\mathcal{A}}(A^{-1})_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}(A)_{\mathcal{A}}^{-1}$.

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2): A Iso $\Rightarrow m = n$.

außerdem $A^{-1} \in L(W, V)$ mit

$A^{-1} \circ A = id_V$ und $A \circ A^{-1} = id_W$

$$\Rightarrow E_n = {}_{\mathcal{A}}(id_V)_{\mathcal{A}} = {}_{\mathcal{A}}(A^{-1} \circ A)_{\mathcal{A}}$$

$$\underset{\text{Verknüpf.}}{=} {}_{\mathcal{A}}(A^{-1})_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}(A)_{\mathcal{A}} \quad \text{sowie}$$

$$E_n = {}_{\mathcal{B}}(id_W)_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}(A)_{\mathcal{A}} \cdot {}_{\mathcal{A}}(A^{-1})_{\mathcal{B}} \Rightarrow \text{Beh.}$$

§ zu Beweis (A) invert. : (2) $\Rightarrow$ (1) :

Sei $m=n$ und ${}_{\mathcal{B}}(A)_{\mathcal{A}}$ invertierbar,

d.h. $\exists\ B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $B \cdot {}_{\mathcal{B}}(A)_{\mathcal{A}} = {}_{\mathcal{B}}(A)_{\mathcal{A}} \cdot B = E$

Satz Vorgabe $\Rightarrow \exists\ L(W,V)$ mit ${}_{\mathcal{A}}(L)_{\mathcal{B}} = B$

$\Rightarrow {}_{\mathcal{A}}(L \circ A)_{\mathcal{A}} = {}_{\mathcal{A}}(L)_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}(A)_{\mathcal{A}} = E = {}_{\mathcal{A}}(id_V)_{\mathcal{A}}$

und ${}_{\mathcal{B}}(A \circ L)_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}(A)_{\mathcal{A}} \cdot {}_{\mathcal{A}}(L)_{\mathcal{B}} = E = {}_{\mathcal{B}}(id_W)_{\mathcal{B}}$

$\underset{\substack{{}_{\mathcal{A}}(\cdot)_{\mathcal{A}} \text{ inj.} \\ {}_{\mathcal{B}}(\cdot)_{\mathcal{B}}}}{\Longrightarrow}$ $L \circ A = id_V$ und $A \circ L = id_W$

Insbesondere ist A injektiv, denn

$A(v_1) = A(v_1) \Rightarrow L(A(v_1)) = L(A(v_2)) \overset{L\circ A = id_V}{\Rightarrow} v_1 = v_2$

und surjektiv, denn für $w \in W$ betrachte

$v := L(w)$, dann $A(v) = A(L(w)) = w$

$\Rightarrow A$ ist bijektiv mit $A^{-1} = L$. $\square$

Beispiel Betrachte $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x+2y \\ 3x+4y \end{pmatrix}$$ $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2)$ Kan. Basis

$$_{\mathcal{B}_0}(L)_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

$$\Rightarrow {}_{\mathcal{B}_0}(L)^{-1}_{\mathcal{B}_0} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow L^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x+y \\ \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y \end{pmatrix}$$