LAP Kap 6

Zu Beweis Spaltenrang = Zeilenrang: (12)

Gaußverfahren $\Rightarrow$ Zeilenrang(A) = Zeilenrang(C),

wobei C in gestufter Form und $Ax=0 \Leftrightarrow Cx=0$

C gestuft $\Rightarrow r =$ Zeilenrang(C) =

Spaltenrang(C) klar da gestuft.

~~Damit~~ Dim-Formel für L_C liefert:

$$n = d(L_C) + r(C) \underset{\substack{Ax=0 \\ \Leftrightarrow Cx=0}}{=} \text{defekt}(L_A) + r$$

Dim-Formel für L_A liefert:

$n = d(L_A) + \text{rang}(A) \Rightarrow \text{rang}(A) = r$

= Zeilenrang(A) = Rang beim Gaußverfahren □

Korollar Für $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ gilt

$$r(A) = r(A^T).$$

Beispiel (Rangbestimmung via Gauß)

$$A \in \mathbb{R}^{4\times 3}, \quad A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Wende Gauß auf A^T (Vorteil: direkt Basis von $\mathrm{Span}(A^1, \dots, A^n)$)

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ Rang $A = 2$ mit Basis von $\mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

gegeben durch $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

denn Span(Zeilen) ändert sich nicht bei Gauß.

Die Matrix einer linearen Abbildung

Es sei $L \in L(V, W)$ $\dim V, \dim W < \infty$

$\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$ Basis von V, $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_m)$ Basis von W. Die Bilder $L(v_k) \in W$ können dann bzgl. der Basis $\mathcal{B}$ von W entwickelt werden:

$$L(v_k) = \sum_{i=1}^{m} a_{ik} w_i \qquad 1 \leq k \leq n .$$

Wir fassen a_{ik} $(1 \leq i \leq m)$ spaltenweise zu einer Matrix $A = (a_{ik}) \in \mathbb{K}^{m \times n}$ zusammen; diese wird mit ${}_{\mathcal{B}}L_{\mathcal{A}}$

bezeichnet. Die k-te Spalte von ${}_{\mathcal{B}}L_{\mathcal{A}}$ ist dann $\begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix}$ der Koordinatenvektor von Lv_k bzg $\mathcal{B}$ $\left[= (Lv_k)_{\mathcal{B}} \right]$.

Beispiel (1): $V = W = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{K}\}$
$= \mathcal{P}_2(\mathbb{K})$

$L(p) := p'$, $\mathcal{A} = (1, t, t^2) = \mathcal{B}$

$$\left.\begin{array}{l} L(1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t \cdot 0 \cdot t^2 \\ L(t) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 \\ L(t^2) = 2t = 0 \cdot 1 + 2 \cdot t + 0 \cdot t^2 \end{array}\right\} \Rightarrow {}_{\mathcal{B}}L_{\mathcal{B}} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} 1 & t & t^2 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ t \\ t^2 \end{array} \end{array}$$

(2) Nullabbildung $0: V \to W$ $0(v) := 0$ $\forall v \in V$

$\Rightarrow {}_{\mathcal{B}}(0)_{\mathcal{A}} = 0$ ← Matrix $\forall$ Basen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$

(3) $\underline{id: V \to V}$ mit $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$ Basen

${}_{\mathcal{B}}(id)_{\mathcal{B}} = E$ (Einheitsmatrix)

${}_{\mathcal{B}}(id)_{\mathcal{A}} =$ Transformationsmatrix von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ von vorher.

(4) Drehung um Winkel α in $\mathbb{R}^2$: D_α

Komplex: $(x_1 + ix_2) \longmapsto e^{i\alpha}(x_1 + ix_2) = \ldots$

$= (\cos(\alpha) + i\sin\alpha)(x_1 + ix_2) = (\cos(\alpha)x_1 - \sin(\alpha)x_2)$
$+ i(\sin(\alpha)x_1 + \cos(\alpha)x_2)$

LAP Kap 6 (16)

zu D_α: $D_\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cos\alpha - \sin(\alpha) x_2 \\ \sin(\alpha) x_1 + \cos(\alpha) x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

d.h. $D_\alpha = L_A$ mit $A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$

$= {}_{\mathcal{B}_0}(D_\alpha)_{\mathcal{B}_0}$ mit kanonischer Basis $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2)$

$\ker(D_\alpha) = \{0\} \Longrightarrow D_\alpha$ injektiv $\underset{\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2}{\Rightarrow}$ bijektiv

mit $(D_\alpha)^{-1} = D_{-\alpha}$

(5) Für $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ gilt für $L_A \in L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$

mit den kanonischen Basen $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$

von $\mathbb{K}^n$ und $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_m)$ von $\mathbb{K}^m$ gilt:

$$L_A(e_k) = A \cdot e_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m} a_{ik} e_i$$

d.h. ${}_{\mathcal{B}_1}(L_A)_{\mathcal{B}_0} = A$.

LAP Kap 6

Satz (Koordinatenvektor) Seien $L_1, L_2 \in L(V, W)$ mit Basen $\mathcal{A}$ von V und $\mathcal{B}$ von W. Dann gilt:

① $\left(L_1(v)\right)_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}(L_1)_{\mathcal{A}} \cdot (v)_{\mathcal{A}}$

② ${}_{\mathcal{B}}(\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2)_{\mathcal{A}} = \lambda_1 {}_{\mathcal{B}}(L_1)_{\mathcal{A}} + \lambda_2 {}_{\mathcal{B}}(L_2)_{\mathcal{A}}$, d.h.

${}_{\mathcal{B}}(\cdot)_{\mathcal{A}} : L(V, W) \longrightarrow \mathbb{K}^{\dim W \times \dim V}$ ist linear.

Beweis: zu ① Sei $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$, $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_m)$

und $v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$, d.h. $(v)_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad L_1(v) = L_1\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i L_1(v_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{k=1}^{m} a_{ki} w_k = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i\right) w_k$$

mit ${}_{\mathcal{B}}(L_1)_{\mathcal{A}} = (a_{ki})$, d.h. $\left(L_1(v)\right)_{\mathcal{B}}$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1i} x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{mi} x_i \end{pmatrix} = {}_{\mathcal{B}}(L_1)_{\mathcal{A}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = {}_{\mathcal{B}}(L_1)_{\mathcal{A}} (v)_{\mathcal{A}}$$

zu ②: klar, weil alle Koeff. sich entsprechend addieren.

Satz (Verknüpfung) Seien U, V, W endl. dimensionale $\mathbb{K}$-VR und $L_1 \in L(U,V)$ sowie $L_2 \in L(V,W)$.
Dann ist $L_2 \circ L_1 : U \longrightarrow W$ linear und sind $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ Basen von U, V, W so gilt:

$$ {}_{\mathcal{C}}(L_2 \circ L_1)_{\mathcal{A}} = {}_{\mathcal{C}}(L_2)_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}(L_1)_{\mathcal{A}} $$

Matrizenmult.

Beweis: Zunächst gilt für $u_1, u_2 \in U$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$

$$(L_2 \circ L_1)(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = L_2(L_1(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2))$$
$$= L_2(\lambda_1 L(u_1) + \lambda_2 L(u_2)) = \lambda_1 L_2(L_1(u_1)) + \lambda_2 L_2(L_1(u_2))$$
$$= \lambda_1 (L_2 \circ L_1)(u_1) + \lambda_2 (L_2 \circ L_1)(u_2) \Rightarrow L_2 \circ L_1 \text{ linear.}$$

Für alle Matrizen A gilt $A \cdot e_k = A^k$ (k-te Spalte)

Teste beide Seiten mit e_k + $\mathcal{A} = (u_1, \dots, u_l)$

$$ {}_{\mathcal{C}}(L_2 \circ L_1)_{\mathcal{A}} \cdot e_k = {}_{\mathcal{B}}(L_2 \circ L_1)_{\mathcal{A}} (u_k)_{\mathcal{A}} \overset{①}{=} (L_2 \circ L_1(u_k))_{\mathcal{C}} $$

$$ {}_{\mathcal{C}}(L_2)_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}(L_1)_{\mathcal{A}} e_k = {}_{\mathcal{C}}(L_2)_{\mathcal{B}} \, {}_{\mathcal{B}}(L_1)_{\mathcal{A}} (u_k)_{\mathcal{A}} \overset{①}{=} {}_{\mathcal{C}}(L_2)_{\mathcal{B}} (L_1 u_k)_{\mathcal{B}} $$

$$ \overset{①}{=} (L_2(L_1(u_k)))_{\mathcal{C}} = (L_2 \circ L_1(u_k))_{\mathcal{C}} \Rightarrow \text{Beh.} $$

□

Korollar (Basiswechsel)

Es seien $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ Basen von V, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ Basen von W und $L \in L(V, W)$. Dann gilt:

$$_{\mathcal{B}'}(L)_{\mathcal{A}'} = {}_{\mathcal{B}'}(id)_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}(L)_{\mathcal{A}} \cdot {}_{\mathcal{A}}(id)_{\mathcal{A}'}$$

Im Spezialfall $V = W$ ~~und~~, $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ und $\mathcal{A}' = \mathcal{B}'$ gilt:

$$_{\mathcal{B}}(L)_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}(id)_{\mathcal{B}'} \, {}_{\mathcal{B}'}(L)_{\mathcal{B}'} \, {}_{\mathcal{B}'}(id)_{\mathcal{B}}$$

$$= \left[{}_{\mathcal{B}'}(id)_{\mathcal{B}}\right]^{-1} {}_{\mathcal{B}'}(L)_{\mathcal{B}'} \, {}_{\mathcal{B}'}(id)_{\mathcal{B}}$$

Beweis: $_{\mathcal{B}'}(L)_{\mathcal{A}'} = {}_{\mathcal{B}'}(id_W \circ L \circ id_V)_{\mathcal{A}'}$

$$\overset{\text{Satz}}{=} {}_{\mathcal{B}'}(id)_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}(L)_{\cancel{\mathcal{B}}\mathcal{A}} \cdot {}_{\mathcal{A}}(id)_{\mathcal{A}'} \quad = \text{, Beh.} \quad \square$$

Definition (ähnlich) Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißen ähnlich, falls es eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gibt mit $A = S^{-1} B \cdot S$.

Satz und Definition ($\mathrm{Det}(L)$, $\mathrm{Spur}(L)$)

Es sei V ein endl. dimensionaler $\mathbb{K}$-VR und $V \in L(V,V)$. Dann ist die Determinante und die Spur von L definiert durch

$$\det(L) := \det({}_{\mathcal{B}}(L)_{\mathcal{B}}) \quad \text{und}$$

$$\mathrm{Spur}(L) := \mathrm{Spur}\,{}_{\mathcal{B}}(L)_{\mathcal{B}} \quad \text{für eine}$$

Basis $\mathcal{B}$ von V. Die Definition hängt nicht von der speziellen Wahl von $\mathcal{B}$ ab.

Beweis: Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Basen von V.

$$\Rightarrow \det{}_{\mathcal{B}}(L)_{\mathcal{B}} = \det\left[{}_{\mathcal{A}}(\mathrm{id})_{\mathcal{B}}^{-1} \cdot {}_{\mathcal{A}}(L)_{\mathcal{A}} \cdot {}_{\mathcal{A}}(\mathrm{id})_{\mathcal{B}}\right]$$

$$\overset{\text{Mult.}}{=} \underbrace{\det\left({}_{\mathcal{A}}(\mathrm{id})_{\mathcal{B}}^{-1}\right)}_{= \det{}_{\mathcal{A}}(\mathrm{id})_{\mathcal{B}}^{-1}} \cdot \det{}_{\mathcal{A}}(L)_{\mathcal{A}} \cdot \det{}_{\mathcal{A}}(\mathrm{id})_{\mathcal{B}}$$

$$= \det{}_{\mathcal{A}}(L)_{\mathcal{A}}.$$

$$\mathrm{Spur}\,{}_{\mathcal{B}}(L)_{\mathcal{B}} = \mathrm{Spur}\left[{}_{\mathcal{A}}(\mathrm{id})_{\mathcal{B}}^{-1}\,{}_{\mathcal{A}}(L)_{\mathcal{A}}\,{}_{\mathcal{A}}(\mathrm{id})_{\mathcal{B}}\right]$$

$$\overset{\mathrm{Spur}(AB)=\mathrm{Spur}(BA)}{=} \mathrm{Spur}\left[\underbrace{{}_{\mathcal{A}}(\mathrm{id})_{\mathcal{B}}\,{}_{\mathcal{A}}(\mathrm{id})_{\mathcal{B}}^{-1}}_{=E}\,{}_{\mathcal{A}}(L)_{\mathcal{A}}\right] = \mathrm{Spur}\,{}_{\mathcal{A}}(L)_{\mathcal{A}} \qquad \square$$