LAP Kap 6

Beweis Satz Ker/Bild:

zu (1): $0_W = A(0_V) - A(0_V) = A(0_V - 0_V) = A(0_V)$.

zu (2): Seien $w_1 = A(v_1)$, $w_2 = A(v_2) \in A(E)$

$$\Rightarrow w_1 + w_2 = A(v_1) + A(v_2) = A(\underbrace{v_1 + v_2}_{\in E}) \in A(E)$$

$$\lambda w_1 = \lambda A(v_1) = A(\underset{\uparrow E}{\lambda v_1}) \in A(E)$$

$0_V \in E \Rightarrow 0_W = A(0_V) \in A(E) \neq \emptyset$, d.h.

$A(E)$ ist ein Unterraum.

zu (3): $0_W \in F \Rightarrow 0_V \in A^{-1}(F) \neq \emptyset$

Seien $v_1, v_2 \in A^{-1}(F)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann

$$A(v_1 + v_2) = \underset{\uparrow F}{A(v_1)} + \underset{\uparrow F}{A(v_2)} \in F \Rightarrow v_1 + v_2 \in A^{-1}(F)$$

$$A(\lambda v_1) = \lambda \underset{\uparrow F}{A(v_1)} \in F \Rightarrow \lambda v_1 \in A^{-1}(F)$$

$\Rightarrow$ $A^{-1}(F)$ ist ein Unterraum.

zu (4): Sei $0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$ nicht alle $\lambda_i = 0$

$$\Rightarrow 0 = A(0) = A\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A(v_i)$$

$\Rightarrow (A(v_1), \ldots, A(v_n))$ linear abh.

LAP Kap 6

5

Zu Beweis Kern/Bild : Zu 5 :

"⇒":

Sei A injektiv $\overset{1}{\Longrightarrow}$ $\operatorname{Kern} A = \{0\}$ $(A(0)=0)$

"⇐": Sei $\operatorname{Kern} A = \{0\}$ und $v_1 \neq v_2$

Ang. $A(v_1) = A(v_2)$ $\Rightarrow 0 = A(v_1) - A(v_2)$

$= A(v_1 - v_2)$, d.h. $v_1 - v_2 \in \operatorname{Kern} A \Rightarrow v_1 = v_2$ ↯

$\Rightarrow$ A ist injektiv

Klar $\operatorname{Kern} A = \{0\} \Longleftrightarrow \dim_K \operatorname{Kern} A = 0 = \operatorname{defekt}(A)$.

Zu 6 : Sei $w_1, w_2 \in W$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in K$. Setze

$v_1 := A^{-1}(w_1)$ und $v_2 := A^{-1}(w_2)$. Dann

$$A(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 A(v_1) + \lambda_2 A(v_2) = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2$$

$$\Rightarrow A^{-1}(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \lambda_1 A^{-1}(w_1) + \lambda_2 A^{-1}(w_2)$$

□

Theorem (Dimensionsformel)

Seien V und W $\mathbb{K}$-VR und $A \in L(V,W)$.

Dann gilt: $\operatorname{rang}(A) + \operatorname{defekt}(A) = \dim V$

(Mit den Regeln $\infty + n = \infty$ und $\infty + \infty = \infty$)

Beweis: Ist $\dim \operatorname{Kern} A = \infty \Rightarrow \dim V = \infty$,

da $\operatorname{Kern} A \leq V$, dh. Formel stimmt.

Also können wir ohne Einschränkung annehmen:

$k := \dim \operatorname{Kern} A < \infty$. Wähle Basis

$\{a_1, \dots, a_k\}$ von $\operatorname{Kern} A$.

Zeige: Ist $\{a_1, \dots, a_k, b_{k+1}, \dots, b_n\}$ für ein

$n \geq k+1$ linear unabhängige Menge in V,

so ist $\{A(b_{k+1}), \dots, A(b_n)\}$ linear unabhängig

in W. $(*)$

zu Beweis Dimformel (*) :

Sei $\sum_{j=k+1}^{n} \lambda_j A(b_j) = 0 \Rightarrow A(\sum_{j=k+1}^{n} \lambda_j b_j) = 0$

d.h. $\sum_{j=k+1}^{n} \lambda_j b_j \in \operatorname{Kern} A \Rightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_k$ mit

$\sum_{j=k+1}^{n} \lambda_j b_j = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} (-\lambda_i) a_i + \sum_{j=k+1}^{n} \lambda_j b_j = 0$

$\overset{\text{l.u.}}{\Longrightarrow} \lambda_i = 0 \ \forall i$, dh ~~$\{A(b_{k+1}), \dots,$~~ A (*) gilt.

Ist also V unendlich dimensional

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ gibt es $b_{k+1}, \dots, b_n$ derart, dass

$\{a_1, \dots, a_k, b_{k+1}, \dots, b_n\}$ linear unabhängig ist

$\Rightarrow$ in Bild(A) gibt es beliebig große Systeme von linear unabh. Vektoren

$\Rightarrow \operatorname{rang}(A) = \dim \operatorname{Bild}(A) = \infty$.

$\Rightarrow$ Formel stimmt für $\dim V = \infty$.

Für $\dim V = n < \infty$ gibt es nach dem Basisergänzungssatz $\{b_{k+1}, \dots, b_n\}$ derart, dass $\{a_1, \dots, a_k, b_{k+1}, \dots, b_n\}$ eine Basis von V ist.

zu Beweis Dimformel:

<u>Zz</u>: $\{A(b_{k+1}), \ldots, A(b_n)\}$ ist Basis von Bild(A)

Lineare Unabhängigkeit folgt aus (*)

~~Zz~~ fehlt noch: $\text{Bild}(A) = \text{Span}\{A(b_{k+1}), \ldots, A(b_n)\}$

<u>"$\supseteq$"</u> klar. <u>zu "$\subseteq$"</u>: Sei $w \in \text{Bild}(A)$

$$\Rightarrow \exists v \in V \text{ mit } w = A(v), \quad v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i + \sum_{j=k+1}^{n} \lambda_j b_j$$

$$\Rightarrow w = A(v) = A\Big(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i + \sum_{j=k+1}^{n} \lambda_j b_j\Big)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underbrace{A(a_i)}_{=0} + \sum_{j=k+1}^{n} \lambda_j A(b_j) \in \text{Span}\{A(b_{k+1}), \ldots, A(b_n)\}$$

$\Rightarrow$ <u>"$\subseteq$"</u>.

Damit folgt: $\dim \text{Bild}(A) = n - k = \text{rang}(A)$

und die Formel stimmt $\square$

<u>Bem:</u> Mit $r(A) := \text{rang}(A)$ und

$d(A) := \text{defekt}(A)$ gilt etwas kürzer

$$r(A) + d(A) = \dim V$$

Beispiele: 1 $V = \mathcal{P}_n(\mathbb{K})$ (Polynome Grad $\leq n$)

$A : \mathcal{P}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{P}_n(\mathbb{K}) \quad A(p) = p'$ (Ableitung)

A ist linear, denn $A(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2)$

$= (\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2)' = \lambda_1 p_1' + \lambda_2 p_2' = \lambda_1 A(p_1) + \lambda_2 A(p_2)$

~~Bi~~ $\operatorname{Kern} A := \{ p \in \mathcal{P}_n(\mathbb{K}) \mid p' = 0 \}$

$= \{ a_0 \in \mathcal{P}_n(\mathbb{K}) \mid a_0 \in \mathbb{K} \}$

$\Rightarrow d(A) = \dim \operatorname{kern} A = 1$ ($\Rightarrow$ A nicht injektiv)

$\operatorname{Bild}(A) = \{ A(p) \mid p \in \mathcal{P}_n(\mathbb{K}) \} = \cancel{\sum_{k=1}^{n} a_k t^k}$

$= \{ \sum_{k=1}^{n} k \cdot a_k \cdot t^{k-1} \mid a_k \in \mathbb{K} \quad k = 1, \dots, n \}$

$= \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{K})$. A nicht surjektiv.

Dim Formel $\dim \operatorname{kern} A + \dim \operatorname{Bild} A = 1 + n =$

$\dim \mathcal{P}_n(\mathbb{K})$.

~~Dim Formel zeigt: V endlichdimensio~~

Beispiel 2: Sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Wir definieren

$L_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ durch $L_A(x) := A \cdot x \in \mathbb{K}^m$

$L_A \in L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$, denn $L_A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$

$= A \cdot (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 A \cdot x_1 + \lambda_2 A x_2 = \lambda_1 L_A(x_1) + \lambda_2 L_A(x_2)$

$\mathrm{Kern}(L_A) = \{ x \in \mathbb{K}^n \mid A \cdot x = 0 \}$

$\hat{=}$ Lösungsmenge des LGS $A \cdot x = 0$

$\mathrm{Bild}(L_A) = \{ b \in \mathbb{K}^m \mid \exists x \in \mathbb{K}^n \text{ mit } A \cdot x = b \}$

$= \{ b \in \mathbb{K}^m \mid \exists x \in \mathbb{K}^n \text{ mit } \sum_{i=1}^{n} x_i A^i = b \}$ Spalten von A

$= \mathrm{Span}(A^1, \dots, A^n)$. ~~Rang~~

$\mathrm{rang}(L_A) = \dim(\mathrm{Span}(A^1, \dots, A^n))$ "Spaltenrang"

$d(L_A) + r(L_A) = n$. Für $m = n$ gilt daher:

L_A injektiv $\Longleftrightarrow$ L_A surjektiv $\Longleftrightarrow$ L_A bijektiv

Für $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$: $Ax = b \ \forall b$ lösbar $\Longleftrightarrow$ $Ax = 0$ nur die triviale Lsg.

LAP Kap 6

(11)

Definition Für eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$

definiert man $\operatorname{rang}(A) := \operatorname{rang}(L_A)$

Satz (Spaltenrang = Zeilenrang)

Es gilt für $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$

$\operatorname{rang}(A) = \dim(\operatorname{Span}(\text{Spalten von } A))$

$= \dim(\operatorname{Span}(\text{Zeilen von } A))$

$=$ algorithmischer Rang im Gaußverfahren

Beweis: Nach Def. gilt $r(A) =$ ~~Spaltenrang~~

$\dim(\operatorname{Span}(A^1, \ldots, A^n))$ Spalten von A

Setze $r := \dim(\operatorname{Span}(z_1, \ldots, z_m))$ Zeilen von A

(Zeilenrang).

Durch elementare Matrixopn ändert sich der Zeilenrang nicht

$[\operatorname{Span}(z_1, \ldots, z_m) \overset{i \neq j}{=} \operatorname{Span}(z_1, \ldots, z_j + \mu z_i, \ldots, z_m)]$