Zu Vektorprodukt / Kreuzprodukt:

Es gilt dann für $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$$\langle X \mid A \times B \rangle_2 = X \cdot (A \times B)$$

$$= \sum_{i=1}^{3} x_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & a_1 & b_1 \\ x_2 & a_2 & b_2 \\ x_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$ Insbesondere gilt:

$A \perp A \times B$ und $B \perp A \times B$, dh.

$A \times B \in \operatorname{Span}\{A, B\}^{\perp}$. Damit folgt:

~~Ist~~ Sind A, B linear unabhängig, so ist $A \times B \neq 0$ und $\operatorname{Span}\{A \times B\} = \operatorname{Span}\{A, B\}^{\perp}$,

denn $\{A, B\}$ Basisergänzung $\Rightarrow \exists\, C \in \mathbb{R}^3$ mit

$|CAB| \neq 0$, dh. $C \cdot (A \times B) \neq 0$

$\Rightarrow A \times B \neq 0$. Wegen $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Span}\{A, B\} \oplus \operatorname{Span}\{A, B\}^{\perp}$

ist $\dim \operatorname{Span}\{A, B\}^{\perp} = 1 \Rightarrow$ ~~$\operatorname{Span}\{A, B\}^{\perp}$~~

$\Rightarrow \operatorname{Span}\{A, B\}^{\perp} = \operatorname{Span}\{A \times B\}$. $\square$

Das Vektorprodukt / Kreuzprodukt

Das Vektorprodukt in $\mathbb{R}^3$ hat folgende leicht nachzurechnende Eigenschaften:

1. $A \times B = -B \times A$, $A \times A = 0$
2. $A \times B = 0 \iff A, B$ linear abhängig
3. $A \times B \perp A$ und $A \times B \perp B$
4. $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$
5. $A \cdot (B \times C) = C \cdot (A \times B) = B \cdot (C \times A)$

Satz und Definition ("ε-Tensor")

Seien $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, n\}$. Dann setze

$$\varepsilon_{i_1 \dots i_n} := \operatorname{sign}(\pi) \quad \text{mit } \pi(k) := i_k \quad \pi : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}.$$

Speziell für $n = 3$ gilt also:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{für } (ijk) = (123)\,(312)\,(231) \\ -1 & \text{für } (ijk) = (213)\,(321)\,(132) \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

zu S+D ε-Tensor :   Dann gilt: ($n=3$)

(1) $$\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\,\delta_{km} - \delta_{jm}\,\delta_{kl}$$

(2) $$(A \times B)_k = \sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, a_i\, b_j$$

Beweis: zu (1) : 1. Fall $j=k$ oder $l=m$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{3} \dots = 0$, denn ein "$\varepsilon$-Tensor" immer Null.

2. Fall $j \neq k$ und $l \neq m$ und $\{j,k\} \neq \{l,m\}$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{3} \dots = 0$, denn $\varepsilon_{ijk} \neq 0$ nur für $i \notin \{j,k\}$

und $\varepsilon_{ilm} \neq 0$ nur für $i \notin \{l,m\}$

3. Fall $j \neq k$ und $l \neq m$ und $\{j,k\} = \{l,m\}$

(a) $j=l,\ k=m \Rightarrow \sum_{i=1}^{3} \dots = \sum_{i=1}^{3} (\varepsilon_{ijk})^2 = 1$

(b) $j=k,\ l=m \Rightarrow \sum_{i=1}^{3} \dots = \sum_{i=1}^{3} \underbrace{\varepsilon_{ijk} \cdot \varepsilon_{ikj}}_{\text{Unterschied 1x Transp.}} = -1$

zu S+D ε-Tensor : $(A \times B)_k = \det(e_k\ A\ B)$

Spalten

$= \det(A\ B\ e_k) = \underset{\text{Leibniz}\ \pi=(i\,j\,l)\in S_3}{\sum} \text{sign}(\pi)\ a_i b_j \delta_{kl}$

mit $\begin{pmatrix} 1 \to i \\ 2 \to j \\ 3 \to l \end{pmatrix}$

$= \sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, a_i b_j .$ $\square$

Satz (Eigenschaften des Kreuzprodukts)

Für $A, B, C, D \in \mathbb{R}^3$ gilt:

(1) $A \times (B \times C) = B(A\cdot C) - C(A\cdot B)$

(2) $(A \times B)\cdot(C \times D) = (A\cdot C)(B\cdot D) - (A\cdot D)(B\cdot C)$

insbesondere $\|A \times B\|^2 = \|A\|^2\|B\|^2 - (A\cdot B)^2$

Beweis: zu (1):

$[A \times (B \times C)]_k = \sum_{i,j=1}^{3} a_i (B \times C)_j\, \varepsilon_{ijk}$

zu Beweis Eigenschaft x :

$$= \sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, a_i \left(\sum_{l,m=1}^{3} \varepsilon_{lmj}\, b_l\, c_m \right)$$

$$= \sum_{i,j,l,m=1}^{3} (\varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{lmj})\, a_i\, b_l\, c_m$$

$$= \sum_{i,l,m=1}^{3} a_i\, b_l\, c_m \cdot \left(\sum_{j=1}^{3} \varepsilon_{jki}\, \varepsilon_{jlm} \right)$$

$$\overset{\text{Formel}}{=} \sum_{i,l,m=1}^{3} a_i\, b_l\, c_m \cdot \left(\delta_{kl}\,\delta_{im} - \delta_{km}\,\delta_{il} \right)$$

$$= b_k \cdot \sum_{i=1}^{3} a_i\, c_i \; - \; c_k \cdot \sum_{i=1}^{3} a_i\, b_i$$

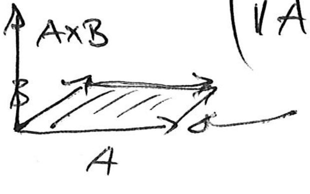
$$= b_k (A \cdot C) - c_k (A \cdot B) \quad \Rightarrow \quad (1)$$

$\square$

(2) Übung

Bem: Für $A, B \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ gilt also $[\varphi \in [0, \pi]]$

$$\frac{\|A \times B\|^2}{\|A\|^2\, \|B\|^2} = 1 - \left(\frac{A \cdot B}{\|A\| \cdot \|B\|} \right)^2 = 1 - \cos^2\varphi = \sin^2\varphi$$



Fläche $\|A \times B\| = \|A\| \|B\| \cdot \sin\varphi$

Kapitel 6 Lineare Abbildungen

Definition (injektiv, surjektiv, bijektiv)

Sei $f: X \to Y$ eine Abbildung.

(1) f heißt injektiv, falls gilt:

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

(2) f heißt surjektiv, falls gilt:

Für alle $y \in Y$ existiert ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ (d.h. $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\} = Y$)

(3) f heißt bijektiv, falls f injektiv und surjektiv ist. In diesem Fall existiert die Umkehrabbildung

$f^{-1}: Y \to X$ mit $f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in X$

und $f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall y \in Y$

(d.h. $f^{-1} \circ f = id_X$ und $f \circ f^{-1} = id_Y$)

<u>Definition</u> (<u>Lineare Abb.</u>) Sei V, W $\mathbb{K}$-VR.

1. Eine Abb. $A: V \to W$ heißt <u>$\mathbb{K}$-lineare Abbildung</u>, falls

$A(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha A(v_1) + \beta A(v_2)$ für alle

$\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ und $v_1, v_2 \in V$ gilt.

2. Bezüglich punktweiser Addition und Skalarmult.: $(A_1 + A_2)(v) := A_1(v) + A_2(v)$

$(\lambda A_1)(v) := \lambda(A_1(v))$ $\forall v \in V, \lambda \in \mathbb{K}$

bilden die linearen Abb. von V nach W einen $\mathbb{K}$-Vektorraum, <u>$L(V, W)$</u>

3. $\mathrm{Bild}(A) := A(V) = \{A(v) \mid v \in V\} \subseteq W$

$\mathrm{rang}(A) := \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Bild}(A)$

$\mathrm{Kern}(A) := \{v \in V \mid A(v) = 0\} \subseteq V$

$\mathrm{defekt}(A) := \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Kern}\, A.$

Satz (Eigenschaften linearer Abb.)

Sei $A \in L(V, W)$ und $E \subseteq V$ und $F \subseteq W$ Unterräume der $\mathbb{K}$-VR V und W. Dann:

1. $A(0_V) = 0_W$
2. $A(E) := \{ A(v) \mid v \in E \}$ ist ein Unterraum von W. (Insbes. Bild(A) Unterraum)
3. $A^{-1}(F) := \{ v \in V \mid A(v) \in F \}$ ist ein Unterraum von V. (Insbes Kern(A) Unterraum)
4. Sind $v_1, \dots, v_n$ linear abhängig in V, so sind die Bilder $A(v_1), \dots, A(v_n)$ linear abhängig in W. Daher
   $\dim A(E) \leq \min(\dim E, \dim W)$
   $\operatorname{rang}(A) \leq \min(\dim V, \dim W)$
5. A ist injektiv $\iff \operatorname{Kern} A = \{0\} \iff \operatorname{defekt} A = 0$
6. A ist bijektiv $\implies A^{-1} : W \to V$ ist ebenfalls linear.