<u>Bemerkung</u>: Ist $\{x_1, \dots, x_m\}$ ein System, welches nicht linear unabhängig ist, so läßt sich Schmidt ~~auch~~ anwenden:

Sei etwa $\{x_1, \dots, x_k\}$ linear unabh.

$\stackrel{\text{Schmidt}}{\Longrightarrow}$ man erhält nach k-Schritten ein ONS $\{v_1, \dots, v_k\}$ mit $\operatorname{span}\{v_1, \dots, v_k\} = \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_k\}$

Ist dann $\{x_1, \dots, x_{k+1}\}$ <u>nicht</u> linear unabh.

$\Longrightarrow x_{k+1} \in \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_k\} = \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_k\}$

$\stackrel{\text{Fourier}}{\Longrightarrow} y_{k+1} = 0$. In diesem Fall läßt man x_{k+1} weg und fährt mit x_{k+2} fort usw ...

Dieses modifizierte Verfahren eliminiert nacheinander alle "überflüssigen" x_k's.

Beispiel $(\mathbb{R}^4, \langle\cdot,\cdot\rangle_{eukl.})$

$$U := \operatorname{Span}(b_1, b_2, b_3, b_4)$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad b_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad b_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$u_1 := b_1 \qquad v_1 := \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$u_2 := b_2 - \langle b_2, v_1\rangle v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\|u_0 \qquad v_2 := \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{1}{4} u_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$u_3 := b_3 - \langle b_3, v_1\rangle v_1 - \langle b_3, v_2\rangle v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\cancel{\|u_3\| =} \qquad v_3 := \frac{u_3}{\|u_3\|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u_4 := b_4 - \langle b_4, v_1\rangle v_1 - \langle b_4, v_2\rangle v_2 - \langle b_4, v_3\rangle v_3$$

$$= b_4 - v_1 - v_2 - 0 \cdot v_3 = 0$$

$\Longrightarrow \{v_1, v_2, v_3\}$ ist eine ONB von U $\square$

Definition (Direkte Zerlegung)

Es sei V ein $\mathbb{K}$-VR und U und W Unterräume von V. V ist die direkte Summe von U und W, schreibe

$V = U \oplus W$, wenn jeder Vektor $v \in V$ sich eindeutig in der Form $v = u + w$ mit $u \in U$ und $w \in W$ schreiben läßt.

Bsp: (1) $V = \mathbb{R}^4$, $U := \operatorname{Span}\{e_1, e_2, e_3\}$
$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$ und

$W := \operatorname{Span}\{e_4\}$, $\tilde{W} := \operatorname{Span}\{e_3, e_4\}$

Dann ist $V = U \oplus W$, denn für $x \in \mathbb{R}^4$ gilt $x = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{3} x_i \cdot e_i\right)}_{\in U} + \underbrace{x_4 e_4}_{\in W}$

die Darstellung ist eindeutig, da $\{e_1, \ldots, e_4\}$ eine Basis ist.

zu Bsp ①: Es gilt nicht $V = U \oplus \tilde{W}$,

denn $e_3 = \underset{U}{\underset{\uparrow}{0}} \cdot + \underset{\tilde{W}}{\underset{\uparrow}{e_3}} = \underset{U}{\underset{\uparrow}{\tfrac{1}{2} e_3}} + \underset{\tilde{W}}{\underset{\uparrow}{\tfrac{1}{2} e_3}}$

nicht eindeutig dargestellt.

Satz + Def (Orthogonales Komplement)

Es sei H ein Prähilbertraum.

① Für eine Teilmenge $\emptyset \neq M \subseteq H$ ist das orthogonale Komplement von M

$$M^\perp := \{ x \in H \mid \langle m | x \rangle = 0 \;\; \forall m \in M \}$$

ein Unterraum von H.

② Ist H endlich dimensional und U ein Unterraum von H, so gilt

$$H = U \oplus U^\perp \quad \text{und} \quad U^{\perp\perp} = U$$

sowie $\dim H = \dim U + \dim U^\perp$.

LAP Kap 8

Beweis orth. Komplement:

zu 1 : Klar $0 \in M^\perp$, denn $\langle m | 0 \rangle = 0 \ \forall m \in M$

Sind $u, v \in M^\perp$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, dann gilt

$$\langle m | u+v \rangle = \langle m | u \rangle + \langle m | v \rangle = 0 + 0 = 0$$

$$\langle m | \lambda u \rangle = \lambda \langle m | u \rangle = \lambda \cdot 0 = 0$$

$\Rightarrow$ $u + v \in M^\perp$ und $\lambda u \in M^\perp$.

$\Rightarrow$ $M^\perp$ ist ein Unterraum

zu 2 : Basisergänzung $\Rightarrow$ $\exists$ Basis $\{b_1, .., b_k\}$ von U, diese kann zu einer Basis von H ergänzt werden etwa $\{b_1, .., b_k, b_{k+1}, .., b_n\}$.

Schmidt ONV $\Rightarrow$ $\exists$ ONB von H ~~mit~~ $\{e_1, .., e_n\}$ mit

$$U = \text{Span}\{b_1, .., b_k\} = \text{Span}\{e_1, .., e_k\}$$

zeige: $U^\perp = \text{Span}\{e_{k+1}, .., e_n\}$:

"$\subseteq$": Sei $v \in H$ mit $\langle u | v \rangle = 0 \quad \forall u \in U$

dh $\Rightarrow$ $v = \sum\limits_{i=1}^{n} \langle e_i | v \rangle e_i = \sum\limits_{i=k+1}^{n} \langle e_i | v \rangle e_i$

Zu Beweis orth. Komplement:

"$\supseteq$": Für $v = \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i e_i \in \mathrm{Span}\{e_{k+1},\dots,e_n\}$

gilt für $u = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i$

$$\langle u|v\rangle = \langle \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i \,|\, \sum_{j=k+1}^{n} \lambda_j e_j \rangle \overset{e_i\ \text{ONB}}{=}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \bar{\alpha}_i \underbrace{\langle e_i \,|\, \sum_{j=k+1}^{n} \lambda_j e_j \rangle}_{=0} = 0$$

$\Rightarrow$ Damit gilt $H = U \oplus U^{\perp}$, denn

für $v \in H$ gilt $v = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \langle e_i|v\rangle e_i}_{\in U} + \underbrace{\sum_{i=k+1}^{n} \langle e_i|v\rangle e_i}_{\in U^{\perp}}$

und die Zerlegung ist eindeutig, da die $\{e_1,\dots,e_n\}$ eine Basis ist.

Mit den Argumenten von vorher gilt analog $U^{\perp\perp} = \mathrm{Span}\{e_{k+1},\dots,e_n\}^{\perp}$

$= \mathrm{Span}\{e_1,\dots,e_k\} = U$ $\square$

Außerdem gilt $n = k + (n-k) = \dim U + \dim U^{\perp}$

Beispiel 1 $H = \mathbb{R}^4$, $U = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$

$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \right\}$ Basis von $\mathbb{R}^4$

denn $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

<u>Schmidt ONV</u> $\Longrightarrow$ ONB von $\mathbb{R}^4$ $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

$v_1 := \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\quad v_2 := \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$

$v_3 := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\quad v_4 := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$

mit $U = \operatorname{Span}\{v_1, v_2\}$ und $U^\perp = \operatorname{Span}\{v_3, v_4\}$

Beispiel 2 (<u>Vektorprodukt in $\mathbb{R}^3$</u>)

Seien $A = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

Definiere $A \times B := \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \left[= \begin{vmatrix} e_1 & a_1 & b_1 \\ e_2 & a_2 & b_2 \\ e_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} \right]$

<u>Vektorprodukt</u> oder

das <u>Kreuzprodukt</u> von A und B.