LAP Kap 5

Beweis Norm: (N1) + (N2) sind klar nach Def.

zu Δ-Ungl: $\|x+y\|^2 = \langle x+y \mid x+y \rangle$

$$= \|x\|^2 + \langle x \mid y \rangle + \langle y \mid x \rangle + \|y\|^2$$

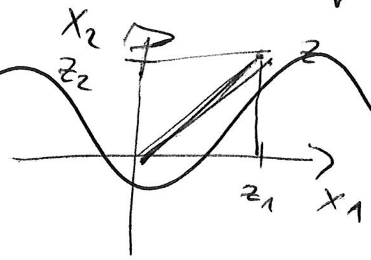
$$\underset{C\text{-}S}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \quad \square$$

Beispiel (euklidische Norm, Standardnorm)

In $\mathbb{K}^n$ mit dem Standardskp gilt:

$$|x| := \|x\|_2 := \sqrt{\langle x \mid x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$

etwa im $\mathbb{R}^2$:



$|z| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$

Bem: Allgemein ist eine Norm auf einem $\mathbb{K}$-VR V eine Abb $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$, welche (N1) – (N3) erfüllt, zB. für $V = \mathbb{K}^n$

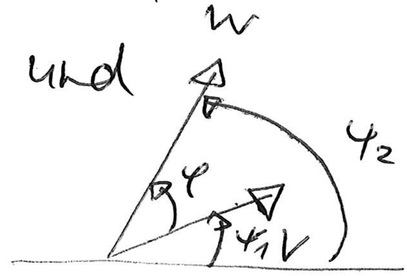
$$\|x\|_1 := \sum_{k=1}^{n} |x_k| \quad \text{oder} \quad \|x\|_\infty := \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$$

Interpretation in $\mathbb{R}^2$: Seien $v, w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

Fasse v, w als komplexe Zahlen auf

$$\Rightarrow v = |v| \cdot e^{i\varphi_1} = |v| \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$w = |w| \cdot e^{i\varphi_2} = |w| \begin{pmatrix} \cos\varphi_2 \\ \sin\varphi_2 \end{pmatrix}$$



$$\langle v | w \rangle_{\mathbb{R}^2} = \left\langle |v| \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 \end{pmatrix} \middle| |w| \begin{pmatrix} \cos\varphi_2 \\ \sin\varphi_2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= |v|\,|w| \left(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \right)$$

$$= |v| \cdot |w| \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = |v|\,|w| \cdot \cos(\varphi)$$

Definition (**Winkel**) Sei H ein reeller PHR. Für $v, w \in H \setminus \{0\}$ ist der (**nicht-orientierte**) **Winkel** $\varphi \in [0, \pi]$ zwischen v und w definiert durch $\cos\varphi := \dfrac{\langle v | w \rangle}{\|w\|\,\|v\|}$

(Definition sinnvoll, denn C-S. $\Rightarrow -1 \le \dfrac{\langle v|w \rangle}{\|w\|\,\|v\|} \le 1$)

Definition (orthogonal) Sei H ein PHR.

(1) Zwei Vektoren $x, y \in H$ heißen senkrecht oder orthogonal (zueinander), falls $\langle x | y \rangle = 0$ gilt.

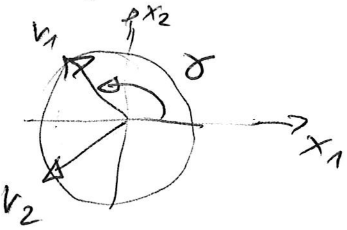
(2) Ein System von $\{ v_i \mid i \in I \}$ von Vektoren aus $H \setminus \{0\}$ heißt ein Orthogonalsystem (OGS), falls die Vektoren v_i paarweise orthogonal sind, dh. $\langle v_i | v_j \rangle = 0$ für $i \neq j$. Sind zusätzlich alle v_i Einheitsvektoren, so heißt $\{ v_i \mid i \in I \}$ Orthonormalsystem (ONS) (dh es gilt $\langle v_i , v_j \rangle = \delta_{ij}$)

(3) Eine Basis von H, welche ein ONS ist, heißt Orthonormalbasis (ONB).

Beispiele: (1) (Standardbasis in $\mathbb{K}^n$)

Die Vektoren $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ bilden eine ONB von $\mathbb{K}^n$ versehen mit dem Standard SKP $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$

(2) In $\mathbb{R}^2$ bilden $\forall$ Winkel $\gamma \in \mathbb{R}$ die Vektoren $v_1 := \begin{pmatrix}\cos\gamma \\ \sin\gamma\end{pmatrix}$, $v_2 := \begin{pmatrix}-\sin\gamma \\ \cos\gamma\end{pmatrix}$ eine ONB von $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot\rangle_2)$



(3) Für jede Auswahl eines Vorzeichens $\sigma_i \in \{\pm 1\}$ bildet $\{\sigma_1 e_1, \dots, \sigma_n e_n\}$ eine ONB von $\mathbb{K}^n$.

Lemma: Jedes OGS ist linear unabhängig.

Beweis: Sei $\{v_i \mid i \in I\}$ ein OGS und $i_1, \dots, i_n \in I$ mit $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_{i_k} = 0$

$$\overset{\forall l}{\Longrightarrow} 0 = \langle v_{i_l} \mid \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_{i_k} \rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle v_{i_l} \mid v_{i_k} \rangle = \lambda_l$$

$\square$

Beobachtung (Fourierkoeffizienten)

Sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine ONB von H und $v \in V$ beliebig. Dann $\exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ mit $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$. SkP mit v_j liefert

$$\langle v_j | v \rangle = \langle v_j | \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \rangle = \lambda_j \implies$$

$$v = \sum_{j=1}^{n} \langle v_j | v \rangle v_j$$ mit den Fourier-Koeffizienten $\langle v_j | v \rangle$ als Koordinaten.

Für $v, w \in H$ gilt dann

$$\langle v | w \rangle = \sum_{k=1}^{n} \overline{\langle v_k | v \rangle} \langle v_k | w \rangle$$ und

insbesondere $$\| v \|^2 = \sum_{k=1}^{n} | \langle v_k | v \rangle |^2$$

Beispiel (1) $(\mathbb{R}^3, \langle\cdot|\cdot\rangle_2)$, $v_1 := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$,

$v_2 := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_3 := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist eine ONB

(nachrechnen) $v := \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ hat dann die

Darstellung $v = \langle v_1 | v \rangle v_1 + \langle v_2 | v \rangle v_2 + \langle v_3 | v \rangle v_3$

$= 1 \cdot v_1 + 5 v_2 + 1 \cdot v_3$

(2) Betrachte $\mathcal{B}' := \{v_1, v_2, v_3\}$ in (1)

und $\mathcal{B} := \{e_1, e_2, e_3\}$

$\Rightarrow {}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id})_{\mathcal{B}'} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Für ${}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id})_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id})_{\mathcal{B}'}^{-1}$ ergibt sich

wegen $e_j = \sum_{i=1}^{3} \langle v_i | e_j \rangle v_i$

${}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id})_{\mathcal{B}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = {}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id})_{\mathcal{B}'}^{T}$

kein Zufall, denn es gilt allgemein:

Lemma (Unitäre Transformationsmatrizen)

Seien B_1 und B_2 zwei ONB von einem PHR H. Dann gilt:

$${}_{B_2}(id)_{B_1} = {}_{B_1}(id)_{B_2}^* \text{ . Insbesondere}$$

$${}_{B_2}(id)_{B_1}^{-1} = \cancel{{}_{B_1}(id)_{B_2}^*} \; {}_{B_2}(id)_{B_1}^* \text{ .}$$

Beweis: Sei $B_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ und $B_2 = \{w_1, \dots, w_n\}$

$$\Rightarrow \quad v_j = \sum_{k=1}^{n} \langle w_k | v_j \rangle w_k \quad \text{, d.h.}$$

$${}_{B_2}(id)_{B_1} = \left(\langle w_k | v_j \rangle \right) .$$

Wegen $w_j = \sum_{k=1}^{n} \langle v_k | w_j \rangle v_k$ folgt daher

$${}_{B_1}(id)_{B_2} = \left(\langle v_k | w_j \rangle \right) = \left(\overline{\langle w_j | v_k \rangle} \right)$$

$$= {}_{B_2}(id)_{B_1}^* \quad \Rightarrow \quad \text{Beh} \quad \square$$

Theorem (Schmidtsches Orthogonalisierungs-verfahren)

Sei H ein PHR und $\{x_1, \dots, x_m\}$ ein System linear unabhängiger Vektoren aus H.

Dann gibt es eine ONB $\{v_1, \dots, v_m\}$ von $U := \operatorname{Span}\{x_1, \dots, x_m\}$ mit

$$\operatorname{Span}\{x_1, \dots, x_k\} = \operatorname{Span}\{v_1, \dots, v_k\} \quad \forall\, 1 \le k \le m.$$

Beweis: Konstruktiv mit dem Orthogonalisierungsverfahren von E. Schmidt:

$$y_1 := x_1 \qquad v_1 := \frac{\cancel{x_1}}{\|y_1\|}$$

$$y_2 := x_2 - \langle v_1 | x_2 \rangle v_1 \qquad v_2 := \frac{y_2}{\|y_2\|}$$

$$y_3 := x_3 - \langle v_1 | x_3 \rangle v_1 - \langle v_2 | x_3 \rangle v_2 \qquad v_3 := \frac{y_3}{\|y_3\|}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$y_m := x_m - \sum_{k=1}^{m-1} \langle v_k | x_m \rangle v_k \,, \qquad v_m := \frac{y_m}{\|y_m\|}$$

Damit kann die Behauptung direkt überprüft werden. $\square$