Satz und Definition (Koordinatenvektor)

Sei $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis von V.

Dann gilt: (1) Jeder Vektor $v \in V$ ist eine eindeutige Linearkombination von $b_1, \dots, b_n$, d.h. es existieren eindeutig bestimmte $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in \mathbb{K}$ mit $v = \sum_{i=1}^{n} \xi_i b_i$.

Die Zahlen $\xi_1, \dots, \xi_n$ aus $\mathbb{K}$ heißen Koordinaten von v bezüglich $\mathcal{B}$ und der Vektor

$$v_{\mathcal{B}} := \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times 1}$$

heißt Koordinatenvektor von v bezüglich $\mathcal{B}$.

Beweis: Wegen $\mathrm{Span}(\mathcal{B}) = V$ existierten $\xi_1, \dots, \xi_n$ mit $\sum_{i=1}^{n} \xi_i b_i = v$. Seien $\xi_1', \dots, \xi_n'$ mit

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i' b_i = v \implies \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \xi_i') b_i = v - v = 0$$

$$\overset{\text{l.u.}}{\implies} \xi_i = \xi_i' \ \forall i \implies \text{eindeutig} \quad \square$$

LAP Kap 4

Beispiele: (1) $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Basis von $\mathbb{R}^3$. Für $v := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ gilt dann

$$v = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ d.h.}$$

$v_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Umgekehrt ist $w_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

so gilt
$$w = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

(2) Ist $\mathcal{B}_0 := \{e_1, \dots, e_n\}$ die kanonische Basis von $\mathbb{K}^n$ $\Rightarrow$ $\forall v \in \mathbb{K}^n : v_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

(3) $\mathcal{P}_n := \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k t^k \;\middle|\; a_k \in \mathbb{K}\ k = 0, \dots, n \right\}$

Menge der Polynomfunktionen vom Grad $\le n$

$\Rightarrow \mathcal{B} = \{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ ist eine Basis von $\mathcal{P}_n$

Für $p = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$ gilt $(p)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n+1 \times 1}$

($\Rightarrow$ Koeffizientenvergleich gerechtfertigt!

Definition (Transformationsmatrizen)

Seien $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ und $\mathcal{B}' = (b_1', \dots, b_n')$ zwei Basen von V. Die Elemente von $\mathcal{B}$ können bezgl. der Basis $\mathcal{B}'$ dargestellt werden:

$$b_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} b_i' \quad (1 \leq k \leq n)$$

Wir fassen a_{ik} $(1 \leq i \leq n)$ spaltenweise zu einer Matrix $(a_{ik}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$ zusammen, diese bezeichnen wir mit ${}_{\mathcal{B}'}(id)_{\mathcal{B}}$, d.h. die k-te Spalte von ${}_{\mathcal{B}'}(id)_{\mathcal{B}}$ ist $\begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}$, der Koordinatenvektor von b_k bezgl. $\mathcal{B}'$.

Die Matrix ${}_{\mathcal{B}'}(id)_{\mathcal{B}}$ heißt Transformationsmatrix (oder Basistransformation) von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}'$.

Beispiel: (1) $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ kanonische Basis und $\mathcal{B}_1 = (v_1, \dots, v_n)$ weitere Basis von $\mathbb{K}^n$.

$$\Rightarrow \quad v_k = \sum_{j=1}^{n} (v_k)_i e_i \quad , \quad v_k = \begin{pmatrix} (v_k)_1 \\ \vdots \\ (v_k)_n \end{pmatrix}$$

d.h. $\; {}_{\mathcal{B}_0}(\mathrm{id})_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} v_1, \dots, v_n \end{pmatrix}$ (einfach)

Spalten

schwieriger: ${}_{\mathcal{B}_1}(\mathrm{id})_{\mathcal{B}_0}$

(2) $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$, $\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Basen von $\mathbb{R}^3$.

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \; {}_{\mathcal{B}_0}(\mathrm{id})_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} , \; {}_{\mathcal{B}_1}(\mathrm{id})_{\mathcal{B}_0} = ?$$

$$e_1 = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e_3 = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \; {}_{\mathcal{B}_1}(\mathrm{id})_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Theorem (Basistransformation)

Sei $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ und $\mathcal{B}' = (b_1', \ldots, b_n')$ Basen von V. Dann gilt

① $(v)_{\mathcal{B}'} = {}_{\mathcal{B}'}(id)_{\mathcal{B}} \cdot (v)_{\mathcal{B}} \quad \forall v \in V$

② ${}_{\mathcal{B}'}(id)_{\mathcal{B}}$ ist invertierbar mit

$$ {}_{\mathcal{B}'}(id)_{\mathcal{B}}^{-1} = {}_{\mathcal{B}}(id)_{\mathcal{B}'} \, . $$

Beweis: zu ①: Sei $v \in V$ mit $(v)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

und $(v)_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} v_1' \\ \vdots \\ v_n' \end{pmatrix} \Rightarrow$ (mit ${}_{\mathcal{B}'}(id)_{\mathcal{B}} = (a_{ik})$)

$$ v = \sum_{k=1}^{n} v_k b_k = \sum_{k=1}^{n} v_k \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{ik} b_i' $$

$$ = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} v_k \right) \cdot b_i' . $$ Wegen der Eindeutigkeit der Basisdarstellung

$\Rightarrow v_i' = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} v_k \; \forall i$, d.h. $(v)_{\mathcal{B}'} = {}_{\mathcal{B}'}(id)_{\mathcal{B}} (v)_{\mathcal{B}}$

Zu Beweis Basistrafo: Zu ②: Es gilt $\forall v$

$$(v)_B \overset{①}{=} {}_B(id)_{B'}(v)_{B'} \overset{①}{=} {}_B(id)_{B'}\,{}_{B'}(id)_B(v)_B$$

mit $(v)_B = e_i$ $(i=1,\dots,n)$ $\Rightarrow {}_B(id)_{B'}\,{}_{B'}(id)_B = E_n$

Genauso: $(v)_{B'} = {}_{B'}(id)_B(v)_B = {}_{B'}(id)_B\,{}_B(id)_{B'}(v)_{B'}$

$\Rightarrow {}_{B'}(id)_B\,{}_B(id)_{B'} = E_n$ $\quad$ = Beh $\quad\square$

Beispiel $V = \mathbb{R}^2$, $B_0 = (e_1, e_2)$,

$B_1 = \left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right) \Rightarrow {}_{B_0}(id)_{B_1} = \begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{pmatrix}$

$${}_{B_1}(id)_{B_0} = \begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{(-2)}\cdot\begin{pmatrix}4 & -3\\-2 & 1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-2 & 3/2\\+1 & -1/2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}_{B_1} = {}_{B_1}(id)_{B_0}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-2 & 3/2\\+1 & -1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2x + 3/2\,y\\+x - 1/2\,y\end{pmatrix}$$

Kapitel 5 Norm und Skalarprodukt

Schule für $n=3,2$: Skalarprodukt

für Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n\times 1}$

$$x \cdot y := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x^T \cdot y$$ Matrizenmult.

Beachte $x \cdot y \in \mathbb{R}$

Allgemein definiert man:

Definition (Prähilbertraum, Skalarprodukt)

Ein $\mathbb{K}$-VR H heißt Prähilbertraum (PHR), wenn für alle $x, y \in H$ ein Skalarprodukt $\langle x, y\rangle \in \mathbb{K}$ definiert ist, mit:

(S1) $$\langle y | x \rangle = \begin{cases} \langle x | y \rangle, & \text{falls } \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ \overline{\langle x | y \rangle}, & \text{falls } \mathbb{K} = \mathbb{C} \end{cases}$$

(S2) $\langle x | \lambda y + \mu z \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \mu \langle x, z \rangle \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \; x, y, z \in H$

(S3) $\langle x | x \rangle \geq 0$, $\langle x | x \rangle = 0 \iff x = 0$.

zu Def PHR: Ist $\dim H < \infty$ und $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so heißt H auch ein euklidischer Raum, im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ein unitärer Raum.

Beispiele: ① Im $\mathbb{K}$-VR $\mathbb{K}^n$ wird durch $\langle z | w \rangle := \sum_{k=1}^{n} \overline{z_k} w_k$ ein SKP definiert. (Standard-SKP)

② Im $\mathbb{K}$-VR $\mathbb{K}^{m \times n}$ wird durch

$\langle A | B \rangle := \operatorname{Spur}(A^* B)$ ein SKP definiert (Übung).

③ Im $l_2(\mathbb{K}) := \{ (a_n) \mid \sum_{k=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \}$ wird durch $\langle x | y \rangle := \sum_{k=1}^{\infty} \overline{x_n} y_n$ ein Skalarprodukt definiert (Übung)

<u>Bem</u>: (1) In der mathematischen Literatur ist es üblich, die Bedingung (S2) im ersten Argument zu fordern, d.h. das Standard-SKP im $\mathbb{C}^n$ wäre dann $\langle z, w\rangle = \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{w_k}$

(also <u>Vorsicht</u>)

(2) Es gibt viele Schreibweisen für $\langle x|y\rangle$, etwa $\langle x,y\rangle$, (x,y), $(x|y)$, ...

In euklidischen Räumen wird oft ~~auch nur~~ der Malpunkt verwendet $x \cdot y$.

<u>Theorem</u> (<u>Cauchy-Schwarzsche Ungl.</u>)

In jedem PHR H gilt $\forall x,y \in H$:

$$|\langle x|y\rangle|^2 \leq \langle x|x\rangle \cdot \langle y|y\rangle$$

mit Gleichheit genau dann, wenn x und y linear abhängig sind.

Beweis (C-S): $\forall x, y \in H, \lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

$$0 \leq \langle x+\lambda y | x+\lambda y\rangle = \langle x|x\rangle + \lambda\langle x|y\rangle + \bar{\lambda}\overline{\langle x|y\rangle} + |\lambda|^2\langle y|y\rangle$$

Ist $y=0$, so ist die Beh klar, für $y \neq 0$ setzt man $\lambda := \frac{\langle y|x\rangle}{\langle y|y\rangle}$ $\Rightarrow$ Beh. $\square$

Nun definieren wir die Norm eines Vektors, welche den ~~k~~ euklidischen Längenbegriff verallgemeinert.

Theorem (Norm) Jeder PHR H ist ein normierter Raum mit der Norm

$$\|x\| := \sqrt{\langle x|x\rangle} \quad \text{(Länge von } x\text{)},$$

dh. die Abb $x \longmapsto \|x\| \in \mathbb{R}$ hat die Eigenschaften:

(N1) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(N2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

(N3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Δ-Ungleichung)