Kapitel 4 Dimension und Basen

Definition (Basis) Sei V ein $\mathbb{K}$-VR. Ein geordnetes n-Tupel $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ heißt Basis von V, wenn gilt:

1. $v_1, \dots, v_n$ sind linear unabhängig
2. $\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_n) = V$

Beispiel: Basis von $\mathbb{K}^n$ ist etwa $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ sog. Kanonische Basis bzw Standardbasis von $\mathbb{K}^n$

Definition (Linear unabhängig, Erzeugnis für unendliche Mengen)

Es sei V ein $\mathbb{K}$-VR und $M \subseteq V$ eine nichtleere Teilmenge.

1. M heißt <u>linear unabhängig</u>, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ und paarweise verschiedenen Vektoren $v_1, \dots, v_n \in M$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0 \implies \lambda_i = 0 \quad \forall i$$

2. $$\mathrm{Span}(M) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \;\middle|\; \begin{array}{l} n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{K} \\ v_i \in M \;\; \forall i=1,\dots,n \end{array} \right\}$$

"Menge der (endlichen) Linearkombinationen von Elementen aus M"

heißt der von M in V <u>aufgespannte Unterraum</u>.

Bem: Diese Definition verallgemeinert offensichtlich die entsprechenden Definitionen für endliche Mengen $M = \{v_1, \dots, v_n\}$.

<u>Bsp</u>: Betrachte den Raum aller Folgen in $\mathbb{K}$:

$V := \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ und $M := \{ e_i \mid i \in \mathbb{N} \}$

mit $e_k(n) := \delta_{kn}$ $(= (0,0,\dots,1,0,\dots)$ k-te Stelle

$\Rightarrow$ $\mathrm{Span}(M) = U$ $\hat{=}$ Menge der finiten Folgen:

$U := \{ (a_n) \mid \exists k \in \mathbb{N}$ mit $a_n = 0 \ \forall n \geq k \}$

(Beachte Span(M) enthält nur <u>endliche</u> Linearkombinationen)

Offensichtlich ist M linear unabhängig $\Rightarrow$ M ist eine Basis der Menge der finiten Folgen (<u>keine</u> Basis von V)

<u>Lemma</u> (<u>Basisergänzungssatz</u>)

Der $\mathbb{K}$-VR V werde von m Vektoren aufgespannt.

Dann gilt:

1. Jedes System von mehr als m Vektoren in V ist linear abhängig.

Lemma (Basisergänzungssatz)

Der $\mathbb{K}$-VR V werde von m Vektoren aufgespannt.

(1) Jedes System von k Vektoren mit $k > m$ in V ist linear abhängig

(2) Ist $\emptyset \neq M \subseteq V$ eine Teilmenge, $U := \operatorname{Span}(M)$, und $\mathcal{A} \subseteq U$ ein System von linear unabhängigen Vektoren aus U, so gibt es eine endliche Basis $\mathcal{B}$ des $\mathbb{K}$-VR U mit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \cup M$, dh. man kann $\mathcal{A}$ durch Hinzunehmen von endlich vielen Vektoren aus M zu einer Basis von U machen.
($\mathcal{A} = \emptyset$ ist erlaubt.)

Beweis: zu (1): Sei $V = \operatorname{Span}(b_1, \dots, b_m)$ und seien $v_1, \dots, v_k \in V$ mit $k > m$.

Dann $\exists$ existieren $a_{ij} \in \mathbb{K}$ $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k)$ mit $v_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} b_i$.

zu Beweis Ergänzung: Damit gilt:

$$0 = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j v_j = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} b_i = \sum_{i=1}^{m} b_i \sum_{j=1}^{k} a_{ij} \lambda_j$$

d.h. falls $A \cdot \vec{\lambda} = 0$ mit $A = (a_{ij})$, $\vec{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$,

so gilt $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j v_j = 0$. Das homogene (LGS)

$A \cdot \vec{\lambda} = 0$ hat mehr Unbekannte k als Gleichungen

$m \xrightarrow{\text{Korollar}} \exists$ nichttriviale Lsg $\vec{\lambda} \neq 0$

$\Rightarrow v_1, \dots, v_k$ linear abhängig.

zu (2): Wir betrachten alle Mengen $\mathcal{C}$,

die aus linear unabhängigen Vektoren bestehen

und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A} \cup M$ erfüllen.

(1) $\Rightarrow$ alle solchen Mengen haben höchstens

m Elemente.

Wir wählen eine solche Menge mit maximaler

Elementeanzahl (etwa n) und nennen sie $\mathcal{B}$.

$\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$

Lap Kap 4

(6)

zu Beweis Ergänzung: zz: $\mathrm{Span}(\mathcal{B}) = U$:

($\Rightarrow$ $\mathcal{B}$ Basis von U + Beh.)

Klar, da $\mathcal{B} \subseteq U$ und U Unterraum:

$\mathrm{Span}(\mathcal{B}) \subseteq U$.

Sei $b_0 \in M \setminus \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B}^* := (b_0, b_1, \dots, b_n)$ hat

$n+1$ Elemente. Wegen der Maximalität von n

$\Rightarrow (b_0, \dots, b_n)$ ist linear abhängig

$\Rightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ mit $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i b_i = 0$

Es gilt $\lambda_0 \neq 0$, sonst wäre $\mathcal{B}$ linear abhängig $\lightning$

$\Rightarrow b_0 = \lambda_0^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \right) \in \mathrm{Span}(\mathcal{B})$

$\Rightarrow M \subseteq \mathrm{Span}(\mathcal{B}) \Rightarrow U = \mathrm{Span}(M) \subseteq \mathrm{Span}(\mathcal{B})$

$\Rightarrow U = \mathrm{Span}(\mathcal{B})$

Satz und Definition (Dimension)

Es sei V ein K-VR, der von endlich vielen Vektoren aufgespannt wird. Dann gilt:

1. V besitzt eine Basis und jedes System von linear unabhängigen Vektoren kann zu einer Basis ergänzt werden

2. Alle Basen von V haben die gleiche Elementanzahl, diese wird als Dimension von V, $\dim_{\mathbb{K}} V$, bezeichnet.

Lässt sich V nicht durch endlich viele Vektoren aufspannen, so sagt man: „V hat unendliche Dimension", $\dim_{\mathbb{K}} V = \infty$.

Beweis: (1) Ergänzungssatz mit $M = V$

(2) $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ Basen von V mit n_1 bzw n_2 Elementen

$$\Longrightarrow V = \mathrm{span}(\mathcal{B}_1) = \mathrm{span}(\mathcal{B}_2) \underset{\text{Ergänzung (1)}}{\overset{\text{l. unabh.}}{\Longrightarrow}} n_1 \leq n_2 \;, n_2 \leq n_1$$

$$\Longrightarrow n_1 = n_2 \quad \square$$

Weitere wichtige Beobachtungen:

Sei $\dim_{\mathbb{K}} V = n$. Dann gilt:

(1) Ist $(w_1, \dots, w_n)$ linear unabhängig in V

$\Longrightarrow \operatorname{span}(w_1, \dots, w_n) = V$ und $(w_1, \dots, w_n)$ Basis

(2) Ist $\operatorname{span}(w_1, \dots, w_n) = V \Rightarrow w_1, \dots, w_n$ linear unabhängig und Basis.

(3) Ist $U \subseteq V$ ein Unterraum, dann ist $\dim_{\mathbb{K}} U \leq n$ und $\dim_{\mathbb{K}} U = n \Longleftrightarrow U = V$

Beweis: zu (1): Ergänzungssatz $\Rightarrow (w_1, \dots, w_n)$ kann zu einer Basis ergänzt werden, diese hat n Elemente $\Longrightarrow (w_1, \dots, w_n)$ ist schon eine Basis.

zu (2): Ergänzungssatz $\Rightarrow \exists$ Basis $\mathcal{B} \subseteq \{w_1, \dots, w_n\}$ von $V = \operatorname{span}(w_1, \dots, w_n)$ mit n-Elementen

$\Longrightarrow (w_1, \dots, w_n)$ ist eine Basis

zu (3): Ergänzungssatz mit $M = U$, $\mathcal{A} = \emptyset \Longrightarrow$

U hat Basis $\tilde{\mathcal{B}}$ mit lin. unabhängigen Vektoren

$\Longrightarrow \dim_{\mathbb{K}} U \leq n$, "$= n$" $\Rightarrow$ Basis $\square$

Beispiele: 1 $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$

2 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$ Basis von $\mathbb{R}^3$,

denn linear unabhängig klar $\underset{\dim \mathbb{R}^3 = 3}{\Longrightarrow}$ Basis

3 $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ $a < b$. Dann ist

$Abb(I, \mathbb{K})$ ein $\mathbb{K}$-VR.

Betrachte die Menge der Polynome

$\operatorname{Span}\{1, t, t^2, t^3, \dots\} \subseteq Abb(I, \mathbb{K})$

$= \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot t^k \mid n \in \mathbb{N}, a_k \in \mathbb{K} \right\}$. Dann

ist $\{1, t, t^2, t^3, \dots\}$ linear unabhängig, denn

sei $\sum_{k=0}^{N} \lambda_k t^k = 0$ $\xrightarrow[N\text{-Mal diff.}]{\cancel{N\text{-Mal}}}$ $N!\, \lambda_N = 0$

$\Rightarrow \lambda_N = 0$ $\underset{(N-1)\text{-Mal diff.}}{\Longrightarrow}$ $\lambda_{N-1} = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow \lambda_0 = 0$

$\overset{zB}{\Longrightarrow}$ $\dim_{\mathbb{K}} C^m(I, \mathbb{K}) = \infty$ $\forall m \in \mathbb{N}_0$

$\dim_{\mathbb{K}} Abb(I, \mathbb{K}) = \infty$.