Kästchensatz

Ist $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$ eine Block-Dreiecksmatrix

so gilt: $\det M = \det A \cdot \det B$

Beweis: ~~M = (~~ Nur Fall

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & E_s \end{pmatrix}$$

Mit Induktion nach r bzw s beweist man leicht:

$$\det \begin{pmatrix} E_r & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(D)$$

$$\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & E_s \end{pmatrix} = \det(A)$$

$\Longrightarrow \det(M) = \det(A) \cdot \det(D)$ nach dem Multiplikationssatz $\square$

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{matrix}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} & \boxed{5} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot 5 = 3 \cdot (-2) \cdot 5 = -30$$

Man sieht: Der Kästchensatz gilt auch für n Kästchen durch mehrfaches Anwenden.

Definition (Die Adjunkte)

Für $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$ definiert man die Minoren M_{ij} $(1 \leq i, j \leq n)$ durch

$$M_{ij} := \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \widehat{a_{1j}} & \cdots & a_{1n} \\ \widehat{a_{i1}} & \cdots & \widehat{a_{ij}} & \cdots & \widehat{a_{in}} \\ a_{n1} & \cdots & \widehat{a_{nj}} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \in \mathbb{K}, \text{ d.h.}$$

M_{ij} ist die Determinante nach Streichen der j-ten Spalte und i-ten Zeile von A.

zu Def Adjunkte: Die Adjunkte von A, $\mathrm{Adj}(A) \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist definiert durch

$$\mathrm{Adj}(A) := (b_{ij}) \quad \text{mit} \quad b_{ij} := (-1)^{i+j} \cdot M_{ji}$$

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Theorem (Entwicklung nach Zeile/Spalte)

Für $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und $1 \leq i, k \leq n$ gilt:

1. (Entwicklung nach der i-ten Zeile)

$$\det A = \sum_{l=1}^{n} a_{il} (-1)^{i+l} M_{il}$$

2. (Entwicklung nach der k-ten Spalte)

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{jk} (-1)^{j+k} M_{jk}$$

Beweis: (Entwicklung)

(1) Konstruiere aus A eine neue Matrix B durch $(i-1)$ Zeilenvertauschungen:

$V(i-1,i), V(i-2,i-1), \dots, V(1,2)$ (i-te Zeile $A \triangleq$ 1. Zeile B)

$$\Rightarrow \det A = (-1)^{i-1} \cdot \det B$$

$$\underset{\text{Entw. 1. Zeile von } B}{\overset{\text{Def.}}{=}} (-1)^{i-1} \cdot \sum_{l=1}^{n} a_{il} (-1)^{l+1} M_{il} \Rightarrow (1)$$

(2) folgt aus (1) durch Anwenden auf A^T. $\square$

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \overset{2.Z.}{=} (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{2.Z.}{=} (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (-2) \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 + (-4) = -3$$

Theorem ($\det A \neq 0 \iff$ invertierbar)

Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Dann gilt:

(1) $\operatorname{Adj}(A) \cdot A = A \cdot \operatorname{Adj}(A) = \det(A) \cdot E_n$

(2) Ist $\det A \neq 0$, so ist A invertierbar mit

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \operatorname{Adj}(A) \in \mathbb{K}^{n \times n}$$

(3) Ist A invertierbar, so ist $\det A \neq 0$ und es gilt: $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Beweis: zu (1): Betrachte Koeff. an Stelle (i,j)

ZZ: $$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot (-1)^{k+j} M_{jk}}_{(A \cdot \operatorname{Adj} A)_{ij}} = \underbrace{\delta_{ij} \cdot \det(A)}_{(\det(A) \cdot E)_{ij}} = \underbrace{\sum_{l=1}^{n} (-1)^{l+i} M_{li} \, a_{lj}}_{= (\operatorname{Adj}(A) \cdot A)_{ij}}$$

Für $i = j$ ist das gerade die Entwicklung nach der i-ten Zeile / Spalte.

fehlt noch $i \neq j$: Zeige nur: $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot (-1)^{k+j} M_{jk} = 0$ für $i \neq j$

(andere Gleichung ist analog bzw. durch $(\cdot)^T$.)

Zu Beweis $\det A \neq 0$ zu (1): Definiere neues $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$

mit den Zeilen $B_m := A_m$ für $m \notin \{i, j\}$

$B_i := A_i$, $B_j := A_i$ $\Rightarrow \det(B) = 0$ ↯

zwei gleiche Zeilen

Entwickle $\det(B)$ nach der j-ten Zeile:

$$0 = \det(B) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} (-1)^{j+k} M_{jk} \Rightarrow (1)$$

zu (2): folgt aus (1) und Division durch $\det A \neq 0$.

zu (3): A invertierbar $\Rightarrow \exists A^{-1} \in \mathbb{K}^{n \times n}$

$$1 = \det(E) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1})$$

$\Rightarrow \det(A) \neq 0$ und $\det(A^{-1}) = [\det(A)]^{-1}$. $\square$

Bsp: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ invertierbar $\Leftrightarrow ad - bc \neq 0$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Korollar (Anwendung auf LGS)

Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und $B \in \mathbb{K}^{n \times 1}$. Dann gilt:

(1) Für $\det A \neq 0$ hat das LGS $AX = B$ die eindeutige Lösung $X = A^{-1}B$, die mit der Cramerschen Regel berechnet werden kann:

$$x_k = \frac{\det(A^1, \dots, A^{k-1}, B, A^{k+1}, \dots, A^n)}{\det(A)}$$

(2) Das homogene System $AX = 0$ hat genau dann nur die triviale Lösung $X = 0$, wenn $\det A \neq 0$ ist.

Beweis: zu (1): $\det A \neq 0 \Rightarrow A$ ist invertierbar mit $A^{-1} = \frac{\mathrm{Adj}(A)}{\det(A)}$. Aus $X = A^{-1} \cdot B$ folgt

$$x_k = \frac{1}{\det(A)} \cdot \sum_{l=1}^{n} (-1)^{k+l} M_{lk} \cdot b_l$$

(Entwickle k-te Spalte)

$$= \frac{1}{\det(A)} \cdot \det(A^1, \dots, A^{k-1}, B, A^{k+1}, \dots, A^n)$$

Zu Beweis Korollar LGS:

Zu ②: "$\Rightarrow$": $AX=0$ nur die triviale Lsg

$\Rightarrow$ Gauß-Verfahren führt zu einer gestuften Matrix C mit Rang n. Da elementare Zeilenumformungen nur das VZ der Determinante ändern, gilt $\det A = \pm \det C$
$= \prod_{i=1}^{n} c_{ii} \underset{\text{Rang } n}{\neq} 0$ (C Δ-Matrix)

"$\Leftarrow$" Gilt $\det A \neq 0 \overset{①}{\Rightarrow} AX=0$ hat die eind. Lösung $X=0$. $\square$

Korollar: Für $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ sind äquivalent:

① $\det A \neq 0$

② Die Spaltenvektoren sind linear unabhängig

③ Die Zeilenvektoren sind linear unabhängig

Beweis: ①$\Leftrightarrow$③: $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \{X \mid AX=0\} = \{0\}$

$\Leftrightarrow A^1, \dots, A^n$ linear unabhängig. $\underset{\text{mit } A^T}{① \Leftrightarrow ③}$ $\square$

Beispiel: Für welche $t \in \mathbb{K}$ sind die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$ linear unabhängig? Antwort: Für $t \neq 1$, denn

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & t \end{vmatrix} = (-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = (-2)(t-1) \neq 0.$$