Die Anzahl der Permutationen von n Elementen ist daher gleich $n!$, der Anzahl der möglichen Umordnungen von $(1, \dots, n)$.

Die Komposition (Hintereinanderausführung) $\pi_1 \circ \pi_2$ von zwei Permutationen ist wieder eine Permutation. Man zeigt leicht mit Induktion, dass jede Permutation durch Hintereinanderausführungen von Transpositionen (Vertauschungen) entsteht.

zB $\pi : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$

$\pi(1) := 2, \quad \pi(2) := 3, \quad \pi(3) := 4, \quad \pi(4) := 1$

Bezeichne mit σ_{ij} die Vertauschung von i und j

$$\Rightarrow \quad \pi = \sigma_{34} \circ \sigma_{23} \circ \sigma_{12}$$

$$\begin{tikzcd}
(1\ 2\ 3\ 4) \arrow[r, bend right, "\sigma_{12}"'] \arrow[rr, bend left, "\pi"] & (2\ 1\ 3\ 4) \arrow[r, bend right, "\sigma_{23}"'] & (2\ 3\ 1\ 4) \arrow[r, bend right, "\sigma_{34}"'] & (2\ 3\ 4\ 1)
\end{tikzcd}$$

Ist eine Permutation π eine Komposition von s Transpositionen, so gilt mit D3

$$\det(E^{\pi(1)}, \dots, E^{\pi(n)}) = (-1)^s \qquad (*)$$

Man kann im Allgemeinen eine Permutation auf verschiedene Weisen aus Transpositionen zusammensetzen (zB $\sigma_{12} = \underbrace{\sigma_{12} \circ \sigma_{12}}_{=id} \circ \sigma_{12}$).

Jedoch ist das Vorzeichen durch $(*)$ eindeutig festgelegt und man nennt es das <u>Signum der Permutation</u>

Für eine Abb $\pi : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$, die <u>nicht</u> bijektiv ist, setzt man das Signum gleich Null, denn

$\det(E^{\pi(1)}, \dots, E^{\pi(n)}) = 0$ in diesem Fall.

(es kommen Spalten doppelt vor!!!)

Wir fassen zusammen:

Definition (Permutationen)

1 Eine bijektive Abb. $\pi : \{1, .., n\} \to \{1, .., n\}$ heißt ~~eine~~ Permutation von n Elementen.

Eine Permutation, die zwei Elemente vertauscht und alle übrigen festlässt, heißt eine Transposition. S_n bezeichne die Menge aller Permutationen von n Elementen.

2 $\pi \in S_n$ heißt gerade [ungerade], wenn π aus einer geraden [ungeraden] Anzahl von Transpositionen zusammengesetzt ist.

3 Für $\pi : \{1, .., n\} \to \{1, .., n\}$ definiert man das Signum durch

$$\operatorname{sign}(\pi) := \det\left(E^{\pi(1)}, .., E^{\pi(n)}\right) = \begin{cases} +1, & \pi \in S_n \text{ gerade} \\ -1, & \pi \in S_n \text{ ungerade} \\ 0, & \pi \text{ nicht bijektiv} \end{cases}$$

Beispiel: (1) $\pi \in S_4$, $\pi(1)=2$, $\pi(2)=3$, $\pi(3)=4$, $\pi(4)=1$

$\Rightarrow \pi = \sigma_{34} \circ \sigma_{23} \circ \sigma_{12} \Rightarrow \pi$ ungerade

$\Rightarrow \operatorname{sign}(\pi) = -1$ oder

$$\operatorname{sign}(\pi) = \begin{array}{cccc} + & - & + & - \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{=1} = -1.$$

Satz: Für $\pi_1, \pi_2, \pi \in S_n$ gilt:

(1) $\operatorname{sign}(\pi_1 \circ \pi_2) = \operatorname{sign}(\pi_1) \cdot \operatorname{sign}(\pi_2)$

(2) $\operatorname{sign}(\pi^{-1}) = \operatorname{sign}(\pi)$

Beweis: zu (1) Seien $\pi_1, \pi_2 \in S_n$ ~~mit~~, welche sich aus s_1 bzw s_2 Transpositionen zusammensetzen

$\Rightarrow \pi_1 \circ \pi_2$ ist Komposition von $s_1 + s_2$ Transpositionen

$\Rightarrow \operatorname{sign}(\pi_1 \circ \pi_2) = (-1)^{s_1+s_2} = (-1)^{s_1} \cdot (-1)^{s_2} = \operatorname{sign}(\pi_1) \operatorname{sign}(\pi_2)$

zu (2) $\operatorname{sign}(\pi^{-1} \circ \pi) = \operatorname{sign}(\pi^{-1}) \cdot \operatorname{sign}(\pi) = \operatorname{sign}(id) = 1$ $\square$

Theorem (Determinante)

① Für $\det A$ mit $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gilt:

$$\det A = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign}(\pi)\, a_{\pi(1)1} \cdot \ldots \cdot a_{\pi(n)n}$$

(Leibniz-Formel)

② $\det(A^T) = \det(A)$

③ (D1)-(D3) gelten auch für die Determinante als Funktion der Zeilenvektoren, ebenso gelten alle weiteren Folgerungen für die Zeilenvektoren anstelle von Spaltenvektoren.

Beweis: Seien $A^1, \ldots, A^n \in \mathbb{K}^{n \times 1}$ beliebig.

Dann $A^k = a_{1k} E^1 + \ldots + a_{nk} E^n$

$$= \sum_{j_k = 1}^{n} a_{j_k k} E^{j_k}$$

Aus (D1) – (D3) folgt dann:

$$\det(A^1, \dots, A^n) = \det\Big(\sum_{j_1=1}^{n} a_{j_1 1} E^{j_1}, \dots, \sum_{j_n=1}^{n} a_{j_n n} E^{j_n} \Big)$$

$$= \sum_{j_1, \dots, j_n = 1}^{n} a_{j_1 1} \cdot \ldots \cdot a_{j_n n} \det(E^{j_1}, \dots, E^{j_n})$$

$$= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign}(\pi)\, a_{\pi(1)1} \cdot \ldots \cdot a_{\pi(n)n} \implies (1)$$

zu (2): Mit (1) gilt:

$$\det(A^T) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign}(\pi)\, a_{1\pi(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\pi(n)}$$

Mit der Umkehrfunktion π^{-1} gilt:

$$\operatorname{sign}(\pi)\, a_{1\pi(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\pi(n)} = \operatorname{sign}(\pi^{-1})\, a_{\pi^{-1}(1)1} \cdot \ldots \cdot a_{\pi^{-1}(n)n}$$

(nur Vertauschung der Faktoren)

Mit π durchläuft auch π^{-1} genau einmal die Menge S_n $\implies$

$$\det(A^T) = \sum_{\pi^{-1} \in S_n} \operatorname{sign}(\pi^{-1})\, a_{\pi^{-1}(1)1} \cdot \ldots \cdot a_{\pi^{-1}(n)n}$$

$$= \det(A).$$

zu 3 : $(\ )^T$ vertauscht Zeilen und Spalten ~~=>~~ ~~alle~~ Da $\det(A^T) = \det(A)$ gelten alle Aussagen auch für Zeilenvektoren. $\square$

Satz (Eindeutigkeit von Det)

1 Jede Fktn $f: \mathbb{K}^{n \times n} \to \mathbb{K}$, welche die Eigenschaften (D1) – (D3) erfüllt, ist ein skalares Vielfache der Determinante,

$$f(A^1, \dots, A^n) = f(E^1, \dots, E^n) \det(A^1, \dots, A^n)$$

2 Insbesondere ist det die einzige Fktn $f: \mathbb{K}^{n \times n} \to \mathbb{K}$ ~~mit~~, welche (D1) – (D3) erfüllt und $f(E^1, \dots, E^n) = 1$ (D4).

Beweis (det eindeutig): ~~In den obigen~~

~~Aus den Herleitungen wurde nur b~~

Wie oben folgt aus (D1) – (D3)

$$f(E^{\pi(1)}, \dots, E^{\pi(n)}) = \operatorname{sign}(\pi)\, f(E^1, \dots, E^n)$$

sowie

$$f(A^1, \dots, A^n) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign} \pi \; a_{\pi(1)1} \cdots a_{\pi(n)n} \; f(E^1, \dots, E^n)$$

$$= f(E^1, \dots, E^n) \cdot \det(A). \qquad \square$$

Determinanten – Multiplikationssatz

Für $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gilt:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Beweis: Definiere $f(B^1, \dots, B^n) := \det(A \cdot B)$ $= \det(AB^1, \dots, A \cdot B^n)$ erfüllt (D1) – (D3) als Fktn der Spalten von $B \Rightarrow$

$$\det(A \cdot B) = f(B^1, \dots, B^n) = f(E^1, \dots, E^n) \cdot \det(B) = \det A \cdot \det B \quad \square$$

Bem: (Matrizen von Matrizen)

Oft ist es zweckmäßig, große Matrizen aus kleineren Blöcken oder Kästchen zusammenzusetzen.

zB Für $n = r+s$ $(r, s, \geq 1)$ schreibt man

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{}^{r} & \overbrace{}^{s} \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc} A & B \\ C & D \end{array} \right) \begin{array}{l} \}r \\ \}s \end{array} \end{array} \quad A \in \mathbb{K}^{r \times r}, B \in \mathbb{K}^{r \times s}$$
$$C \in \mathbb{K}^{s \times r}, D \in \mathbb{K}^{s \times s}$$

Ist $M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$ eine weitere Matrix dieser Bauart, so gilt:

$$M \cdot M' = \begin{pmatrix} A \cdot A' + B \cdot C' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}$$

M heißt obere [untere] Block-Dreiecks-Matrix, falls $C = 0$ [$B = 0$] gilt.