LAP

Kapitel 3 Die Determinante

Bezeichnungen: Wir setzen ein Dach "$\hat{\ }$" über einen Listeneintrag, der aus der Liste gestrichen werden soll. **zB:**

$$(x_1, \dots, \hat{x}_k, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)$$

Ist $A = (A^1, \dots, A^n) \in \mathbb{K}^{n \times n}$ quad. Matrix, dann bezeichnen wir mit $\tilde{A}^k$, denn Spaltenvektor, der aus A^k entsteht durch Streichen der ersten Komponente, d.h.

$$A^k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times 1}, \quad \tilde{A}^k := \begin{pmatrix} a_{2k} \\ a_{3k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{(n-1) \times 1}$$

Definition (Determinante) Für $A = (A^1, \dots, A^n) = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist die **Determinante von A**

$$\det A = \det(A^1, \dots, A^n) = \det(a_{ij})$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \in \mathbb{K}$$

induktiv definiert durch:

1. Für $n=1$ ist $\det A := a_{11} \in \mathbb{K}$

   Für $n=2$ ist $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

2. Für $n \geq 2$ definiert man induktiv:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} (-1)^{k+1} \det(\tilde{A}^1, \dots, \widehat{\tilde{A}^k}, \dots, \tilde{A}^n)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{1k} (-1)^{k+1} \begin{vmatrix} \widehat{a_{11}} & \dots & \widehat{a_{1k}} & \dots & \widehat{a_{1n}} \\ a_{21} & \dots & \widehat{a_{2k}} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & \dots & \widehat{a_{nk}} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Bsp: 1

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 0$$

LAP Kap 3

Bsp 2 (Regel von Sarrus) (3×3)-Det

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \dots = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} -$$

$$- a_{12}a_{21}a_{33} \quad = \left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right| \qquad \begin{array}{c} - \; + \; - \\ \dots \; + \end{array}$$

3 (Untere Dreiecksmatrizen)

Es sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine untere Δ-Matrix

dh. $a_{ij} = 0$ für $j > i$: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Dann gilt $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn} = \prod_{k=1}^{n} a_{kk}$

Beweis: Induktion $n = 1$ ✓

$n-1 \to n$: $\begin{vmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & a_{nn} \end{vmatrix}$

$$\overset{IV}{=} a_{11} \cdot \prod_{j=2}^{n} a_{jj} = \prod_{k=1}^{n} a_{kk}. \qquad \square$$

Satz (Eigenschaften von det)

Für die Determinante $\det(A) = \det(A^1, .., A^n)$ mit $A^k \in \mathbb{K}^{n\times 1}$, $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gilt:

(D1) det ist homogen in jeder Spalte $A^1, .., A^n$, dh $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ gilt ~~$\det(A^1, .., \lambda A^k, .., A^n)$~~

$$\det(A^1, .., \lambda A^k, .., A^n) = \lambda \det(A^1, .., A^k, A^n)$$

(D2) det ist additiv in jeder Spalte $A^1, .., A^n$, dh.

$\forall B^i, C^i \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ $(i = 1, .., n)$ gilt

$$\det(A^1, .., B^i + C^i, .., A^n) = \det(A^1, .., B^i, .., A^n) + \det(A^1, .., C^i, .., A^n)$$

(D3) det ist alternierend oder schiefsymmetrisch,

dh. $\det(A^1, .., B, .., C, .., A^n) = -\det(A^1, .., C, .., B, .. A^n)$

(Bei Vertauschung zweier Spalten ändert sich das Vorzeichen der Determinante)

Beweis: Mit Induktion nur (D3) exemplarisch:

$n = 2$ ✓

~~[illegible]~~: $n-1 \to n$: Betrachte $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$

mit $A = (A^1, \dots, A^{k-1}, B, A^{k+1}, \dots, A^{l-1}, C, A^{l+1}, \dots, A^n)$

$$\Rightarrow \det A = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k \\ i \neq l}}^{n} a_{1i} (-1)^{i+1} \det(\tilde{A}^1, \dots, \tilde{B}, \hat{A}^i, \dots, \tilde{C}, \dots, \tilde{A}^n)$$

$$+ \, b_1 (-1)^{k+1} \det(\tilde{A}^1, \dots, \tilde{A}^{k-1}, \tilde{A}^{k+1}, \dots, \tilde{A}^{l-1}, C, \dots, \hat{A}^n)$$

$$+ \, c_1 (-1)^{l+1} \det(\tilde{A}^1, \dots, \tilde{B}, \tilde{A}^{k+1}, \dots, \tilde{A}^{l-1}, \tilde{A}^{l+1}, \dots, \hat{A}^n)$$

$$\overset{IV}{=} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k \\ i \neq l}}^{n} a_{1i} (-1)^{i+1} (-1) \det(\tilde{A}^1, \dots, \tilde{C}, \dots, \tilde{B}, \dots, \hat{A}^n)$$

$$+ \, b_1 \underbrace{(-1)^{k+1} \cdot (-1)^{l-k-1}}_{= (-1) \cdot (-1)^{l+1}} \det(\tilde{A}^1, \dots, \tilde{A}^{k-1}, \tilde{C}, \tilde{A}^{k+1}, \dots, \hat{B}, \dots, \tilde{A}^n)$$

$$+ \, c_1 \underbrace{(-1)^{l+1} (-1)^{l-1-k}}_{(-1) \cdot (-1)^{k+1}} \det(\tilde{A}^1, \dots, \hat{C}, \tilde{A}^{k+1}, \dots, \hat{B}, \tilde{A}^{l+1}, \dots, \hat{A}^n)$$

$$= -\det(A^1, A^2, \dots, A^{k-1}, C, A^{k+1}, \dots, A^{l-1}, B, A^{l+1}, \dots, A^n) \quad \square$$

Aus (D1) – (D3) folgt sofort

Korollar (Rechenregeln det)

Für $\det A = \det(A^1, \dots, A^n)$ gilt:

1. $\det(A^1, \dots, A^n) = 0$, falls $A^i = A^j$ für zwei Indizes $i \neq j$.

2. $\det(A)$ ändert sich nicht, wenn man zu einer Spalte eine Linearkombination der übrigen Spalten addiert.

3. $\det(A) = 0$, falls $A^1, \dots, A^n$ linear abhängig sind

4. $\det(A) = 0$, falls $A^i = 0$ für ein $i \in \{1, \dots, n\}$

Beweis: zu (4): $\det(A^1, \dots, 0, \dots A^n) =$

$$= \det(A^1, \dots, 0 \cdot 0, \dots, A^n) \overset{(D1)}{=} 0 \cdot \det(A^1, \dots, 0, \dots, A^n) = 0$$

zu (1) $\det(A^1, \dots, A^i, \dots, A^j, A^n) \overset{(D3)}{=} (-1) \cdot \det(A^1, \dots, A, \dots, A, \dots A^n)$

$$\Rightarrow \det(A^1, \dots, A, \dots, A, \dots, A^n) = 0.$$

Zu Beweis Korollar: zu (2):

$$\det\Big(A^1,\dots,A^i + \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \lambda_i A^k,\dots,A^n\Big)$$

i-te Stelle

$$\overset{(D1)+(D2)}{=} \det(A^1,\dots,A^i,\dots,A^n) + \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \det(A^1,\dots,\lambda_k A^k,\dots,A^n)$$

$$= \det(A) + \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \lambda_k \underbrace{\det(A^1,\dots,\underset{\text{i-te Stelle}}{A^k},\dots,A^n)}_{=0,\ \text{wegen (2)}} = \det A$$

Zu (3): Sind $A^1,\dots,A^n$ linear abhängig

$$\overset{\text{Bem}}{\Longrightarrow} \exists\, i \in \{1,\dots,n\} \text{ mit } A^i = \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \lambda_k A^k$$

$$\Rightarrow \det A = \det(A^1,\dots,A^n)$$

$$\overset{(2)}{=} \det\Big(A^1,\dots,A^i - \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \lambda_k A^k,\dots,A^n\Big) = \det(A^1,\dots,0,\dots,A^n)$$

$$\overset{(4)}{=} 0$$

$\square$

Permutationen

Sind $E^1, \dots, E^n$ die Spalten der Einheitsmatrix $E = (\delta_{ij}) = (E^1, \dots, E^n)$

Dann $\det E = 1$ (Δ-Matrix)

Vertauscht man zwei Spalten in E, so dreht sich nach D3 das VZ um.

Allgemeiner: Wir betrachten Abbildungen $\pi : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$. Ist π bijektiv, dh. jedem Element von $\{1, \dots, n\}$ wird genau ein Element von $\{1, \dots, n\}$ zugeordnet, so heißt π Permutation von n Elementen.

Eine Permutation entspricht einer Umordnung der ~~Menge $\{1, \dots, n\}$~~ des Tupels $(1, 2, \dots, n)$ in $(\pi(1), \dots, \pi(n))$.

Die Anzahl der Permutationen von n Elementen ist daher gleich $n!$, der Anzahl der möglichen Umordnungen von $(1, \dots, n)$.

Die Komposition (Hintereinanderausführung) $\pi_1 \circ \pi_2$ von zwei Permutationen ist wieder eine Permutation. Man zeigt leicht mit Induktion, dass jede Permutation durch Hintereinanderausführungen von Transpositionen (Vertauschungen) entsteht.

zB $\pi : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$

$\pi(1) := 2, \quad \pi(2) := 3, \quad \pi(3) := 4, \quad \pi(4) := 1$

Bezeichne mit σ_{ij} ~~die~~ die Vertauschung von i und j

$$\Rightarrow \quad \pi = \sigma_{34} \circ \sigma_{23} \circ \sigma_{12}$$

$$\begin{tikzcd}
(1\ 2\ 3\ 4) \arrow[r, "\sigma_{12}"'] \arrow[rr, bend left, "\pi"] & (2\ 1\ 3\ 4) \arrow[r, "\sigma_{23}"'] & (2\ 3\ 1\ 4) \arrow[r, "\sigma_{34}"'] & (2\ 3\ 4\ 1)
\end{tikzcd}$$