Es ergibt sich sofort:

Satz (Lösungen für gestufte LGS)

Gegeben sei LGS in gestufter Form $CX=D$ mit Rang r und $C \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $D \in \mathbb{K}^m$

1. Ist $r<m$ und $d_j \neq 0$ für ein $j>r$
$\Rightarrow$ $CX=D$ hat keine Lösung

2. Gilt $d_j=0$ für $r<j\leq m$ und $r<n$, so hat $CX=D$ eine unendliche Schar von Lösungen, dabei können gewisse $n-r$ Komponenten des Lösungsvektors beliebig vorgegeben werden

3. Ist $d_j=0$ für $r<j\leq m$ und $r=n$
$\Rightarrow$ $CX=D$ hat eine eindeutige Lsg.

(Ist $r=m$, so ist die Bedingung $d_j=0$ für $r<j\leq m$ erfüllt!!!)

Theorem Jedes lineare Gleichungssystem lässt sich durch elementare Matrixoperationen in gestufte Form überführen und ist daher äquivalent zu einem System in gestufter Form.

Beweis: Induktion nach m (# der Gleichungen)

$m=1$ ✓ $m \to m+1$: Sei $AX=B$ ein LGS mit $(m+1)$ Gleichungen. Es sei s_1 der kleinste Index k derart, dass die Spalte A^k ein Element $\neq 0$ enthält, ~~Durch Vertauschung~~ ~~$V(1,j)$~~ etwa $a_{js_1} \neq 0$ und $A^k = 0$ für $1 \leq k < s_1$.
Durch Vertauschung $V(1,j)$ können wir annehmen, dass $a_{1s_1} \neq 0$ gilt. Mit ~~EA~~ $M\left(1,j,-\frac{a_{js_1}}{a_{1s_1}}\right)$ wird erreicht, dass unterhalb von a_{1s_1} nur noch Nullen in der s_1-ten Spalte stehen

$$\begin{pmatrix} 0 \cdots 0 & a_{1s_1} & a_{1s_1+1} \cdots a_{1n} \\ \vdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \boxed{} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{m \times n}$$

Rest mit Induktion □

Das Beweisverfahren liefert einen echten Algorithmus, die sog. <u>Gauß-Elimination</u>, oder das <u>Gauß-Verfahren</u>:

<u>Beispiele</u>: 1 $A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$: <u>Gauß-Verfahren</u>:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{V(1,2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{M(1,3,-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$, d.h. $\begin{pmatrix} r = 1 \\ s_1 = 2 \end{pmatrix}$

$AX = D$ äquivalent zu $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lsg menge $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 4 - 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, x_3 \in \mathbb{K} \right\}$

Bsp 2

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$ Löse

$Ax = b$ mit $b \in \{e_1, e_2, e_3\}$

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \xrightarrow{V(1,2)} \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\xrightarrow{M(2,3,-1)} \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

Gauß fertig Rang = 3
=> Lösbar mit Rücksubstitution

oder 3. Zeile $\cdot \frac{1}{2}$ ändert nicht die Lsg menge

$$\xrightarrow{Z(3,\frac{1}{2})} \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \xrightarrow{M(3,2,-1)} \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\xrightarrow{M(3,1,-2)} \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \xrightarrow{M(2,1,-1)} \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}$$

Lösungen ablesbar $x_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A \cdot B = E_3 \text{ mit } B := \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & -1/2 \\ 3/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Vorteil jetzt: Gesucht y: $A \cdot y = d$

$\Rightarrow$ Lösung $y = B \cdot d$, denn

$$A \cdot y = A \cdot (B \cdot d) = (A \cdot B) \cdot d = E_3 \cdot d = d$$

Definition (Inverse Matrix) Es sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißt inverse Matrix von A, falls $A \cdot B = B \cdot A = E$ gilt, schreibe $B = A^{-1}$. A heißt in diesem Fall invertierbar oder regulär. (sonst singulär)

Bem: (1) Falls es eine inverse Matrix gibt, so ist sie eindeutig bestimmt, denn seien B_1 und B_2 zwei Inversen von A, dann

$$B_1 = B_1 \cdot E = B_1 \cdot (A \cdot B_2) = (B_1 \cdot A) \cdot B_2 = E \cdot B_2 = B_2$$

zu Bem A^{-1}:

(2) ~~Es gilt:~~ A invertierbar

$\Longrightarrow (A^{-1})$ invertierbar mit $(A^{-1})^{-1} = A$

Beweis: ~~Denn~~: Da A invertierbar ist, gilt

$A \cdot A^{-1} = E = A^{-1} \cdot A$, dass ist aber genau die Definition der Inversen von (A^{-1}).

$\overset{(1)}{\Longrightarrow} A = (A^{-1})^{-1}$ $\square$

(3) Sind A, B invertierbar, so auch $A \cdot B$ mit $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

Beweis: $(B^{-1}A^{-1}) \cdot (AB) = B^{-1}(A^{-1}A) \cdot B = B^{-1} E B$

$= B^{-1} B = E$, genauso $(AB) \cdot (B^{-1}A^{-1})$. $\square$

Satz: (Invertierbar $\Longleftrightarrow$ ~~LGS~~ Rang n)

$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn A äquivalent ist zu einem System in gestufter Form mit Rang n.

Beweis: (Invertierbar $\iff$ Rang n)

"$\Rightarrow$": A invertierbar $\Rightarrow$ $Ax = b$

eindeutig lösbar durch $x = A^{-1}b$

$\Rightarrow$ A äquivalent zu C gestuft mit Rang n

(n−r Komponenten frei wählbar)

"$\Leftarrow$": A äquivalent zu gestuftem C mit Rang n

$\Rightarrow$ $Ax = b$ eindeutig lösbar $\forall b$

$\Rightarrow$ $\exists\, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit $A \cdot B = E$

Bsp $b \in \{e_1, .., e_n\}$

~~Es gilt~~ Fehlt noch zz: $B \cdot A = E$

Es gilt $A \cdot B \cdot A \cdot x = Ax \quad \forall x$

$\Rightarrow$ $y := B \cdot A \cdot x$ löst $Ay = Ax$

$\overset{\text{Lsg eindeutig}}{\Longrightarrow}$ $x = y = B \cdot A \cdot x \quad \forall x$

Mit $x = e_i$ $(i = 1, .., n)$ folgt $B \cdot A = E$

(Beachte $M \cdot e_i = M^i$ ~~ite~~ i-te Spalte von M $\forall M \in \mathbb{K}^{n \times n}$)

$\square$

Der Satz zeigt also, dass die Inverse mit dem Gaußverfahren berechnet werden kann. Ergibt sich beim Gauß-Verfahren ein Rang echt kleiner als n, so ist die Matrix <u>nicht</u> invertierbar (dh. <u>singulär</u>). Im nächsten Kapitel werden wir ~~ein~~ ~~z~~ jeder quad. Matrix A eine Zahl zuordnen, die <u>Determinante</u>, welche entscheidet, ob A invertierbar ist.

Neben dem praktischen Nutzen ~~des Gauß-Verfahrens~~, liefert das Gaußverfahren auch wichtige theoretische Einsichten: zB.

<u>Korollar</u> Jedes homogene lineare Gleichungssystem, $A \cdot X = 0$, mit mehr Unbekannten als Gleichungen hat nichttriviale Lösungen

<u>Beweis</u>: Gauß $\Rightarrow$ $r \leq m < n$ $\Rightarrow$ $(n-r) > 0$ Komponenten frei wählbar. $\square$