und das zugehörige <u>homogene lineare Gleichungssystem</u>

$$(L_0)\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \quad\; \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}\right\}$$

mit <u>m Gleichungen</u> und <u>n Unbekannten</u> $x_1, \dots, x_n$

Mittels Matrizenmult. schreiben wir kurz

$(L)\ A \cdot X = B$, $(L_0)\ A \cdot X = 0$; $\cancel{X \in \mathbb{K}^{n \times 1} (\cong \mathbb{K}^n)}$

mit $X \in \mathbb{K}^{n \times 1}$ ($\cong \mathbb{K}^n$)

Die Matrix A heißt <u>Koeffizientenmatrix</u>,

die Matrix $(A^1, \dots, A^n, B) \in \mathbb{K}^{m \times (n+1)}$

Spalten von A

die <u>erweiterte Matrix</u> von (L).

Jeder Vektor X, der die Gleichung (L) bzw (L_0) erfüllt, heißt <u>Lösung</u> von (L) bzw. (L_0)

LAP Kap 2

10

<u>zu LGS</u>: Schreiben wir wieder $A = (A^1, \ldots, A^n)$ mit den Spaltenvektoren A^k von A, dann

$$(L_0) \quad x_1 A^1 + x_2 A^2 + \ldots + x_n A^n = 0$$

$$(L) \quad x_1 A^1 + x_2 A^2 + \ldots + x_n A^n = B$$

Da auf der linken Seite des Gleichungssystems eine Linearkombination der Spalten von A steht, ergibt sich sofort:

<u>Satz</u> (<u>Lösbarkeit LGS</u>)

(1) (L_0) hat immer die Lösung $X = 0$ (<u>triviale Lösung</u>). (L_0) hat genau dann eine nichttriviale Lösung, wenn die Spalten von A linear abhängig sind.

(2) Die Lösungen von (L_0) bilden einen Unterraum von $\mathbb{K}^n$, d.h. ("Superpositionsprinzip")

Zu Satz LGS ②: Linearkombinationen von Lösungen von (L_0) sind wieder Lösungen von (L_0).

③ (L) ist genau dann lösbar, wenn B ~~lie~~ in der linearen Hülle der Spalten von A liegt, dh. $B \in \mathrm{Span}(A^1, \dots, A^n)$

④ Die Differenz zweier Lösungen von (L) löst (L_0). Daher bekommt man alle Lsg von (L), indem man zu einer Lsg von (L) (spezielle Lsg) alle Lsg von (L_0) addiert, dh. ~~ist~~ gilt $AX_s = B$, so auch

$$\{X \in \mathbb{K}^n \mid AX = B\} = \{X_s + Y \mid AY = 0\}$$
$$= X_s + \{Y \in \mathbb{K}^n \mid AY = 0\}$$

Beweis: ① + ③ sind klar, Sei

Zu ②: Sei X_1, X_2 Lsg von (L_0) und $\lambda \in \mathbb{K}$

$\Rightarrow$ $\cancel{A(\lambda X_1}$ $A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = 0 + 0 = 0$, $A(\lambda X_1) = \lambda \underbrace{AX_1}_{=0}$

zu Beweis (4): Seien $X_1, X_2 \in \mathbb{K}^n$ zwei Lösungen von (L). $X := X_1 - X_2$ löst dann

$$A \cdot X = A(X_1 - X_2) = AX_1 - AX_2 = B - B = 0$$

Ist X_S eine Lsg von (L) und X eine Lsg von (L_0)

$$\Rightarrow A \cdot (X_S + X) = A \cdot X_S + AX = B + 0 = B. \quad \square$$

Um ein LGS explizit zu lösen, benutzt man das ~~Gaußsche Eliminations~~

Gaußsche Eliminationsverfahren

Man formt das LGS solange äquivalent um, bis sich die Lösungen einfach ablesen lassen.

Wir nennen zwei LGS $AX = B$ und $\tilde{A}X = \tilde{B}$ äquivalent, wenn ihre Lösungsmengen übereinstimmen, d.h. $\{X \mid AX = B\} = \{X \mid \tilde{A}X = \tilde{B}\}$

Das Gauß-Verfahren arbeitet mit 2 Umformungen:

(I) <u>Zeilenvertauschung</u>: Vertausche die i-te Zeile mit der j-ten Zeile

Bezeichnung: $V(i,j)$

(II) <u>Ersetzungen</u>: Mit $M(i,j,\mu)$ $(\mu \in \mathbb{K})$ bezeichnen wir das Ersetzen der j-ten Zeile durch die Summe der j-ten Zeile mit dem μ-fachen der i-ten Zeile,

dh. a_{jk} $(k=1,..,n)$ sowie b_j werden ersetzt durch $\tilde{a}_{jk} := a_{jk} + \mu a_{ik}$

bzw $\tilde{b}_j := b_j + \mu b_i$.

Diese Umformungen nennt man auch <u>elementare Zeilenoperationen</u> und man kann sie auf A, (A,B) oder jede beliebige Matrix anwenden.

Ziel des Gaußverfahrens:

LGS $\underset{\text{elementare Opn}}{\rightsquigarrow}$ einfache (gestufte) Form.

Lemma: Geht das LGS $\tilde{A}X = \tilde{B}$ durch elementare Zeilenopn aus $AX = B$ hervor, so sind beide Systeme äquivalent.

Beweis: Man braucht die Aussage nur für eine einzige elem. Opn zeigen:
Für eine Zeilenvertauschung ist die Aussage klar. Betrachte nun $M(i,j,\mu)$:

Ist X eine Lsg von $AX = B$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k = b_j \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = b_i$$

Also auch

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} (a_{jk} + \mu a_{ik}) x_k}_{= \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_{jk} x_k} = \underbrace{b_j + \mu b_i}_{= \tilde{b}_j}$$

zu Lemma äquivalent Opn Beweis:

$\Rightarrow$ X löst auch $\hat{A}X = \tilde{B}$. Durch die Opn $M(i,j,-\mu)$ geht aber $\hat{A}X = \tilde{B}$ wieder in $AX = B$ über $\overset{\text{vorher}}{\Rightarrow}$ Jede Lsg ~~des umgeformten Systems ist eine Lsg des~~ von $\hat{A}X = B$ löst auch $AX = B$ $\Rightarrow$ Äquivalenz $\square$

Definition (gestufte Form) Sei ~~C ∈ K~~ $C = (c_{ij}) \in \mathbb{K}^{m \times n}$ eine Matrix und $D \in \mathbb{K}^{m \times 1}$ ein Spaltenvektor.

Wir sagen, die Matrix C, bzw das LGS $CX = D$, hat gestufte Form, wenn für gewisse Zahlen $r \in \{0, 1, \dots, m\}$ und $1 \le s_1 < s_2 < \dots < s_r \le n$ gilt:

(i) $c_{jk} = 0$ für $j > r$, $k = 1, \dots, n$

(ii) $c_{jk} = 0$ für $j \le r$, $1 \le k < s_j$

(iii) $c_{j, s_j} \neq 0$ für $j = 1, \dots, r$

LAP Kap 2

zu Def. gestufte Form: Die Zahl r heißt der Rang der Matrix C bzw des LGS $CX=D$.

Bem: Das LGS $CX=D$ in gestufter Form

$$\begin{array}{rcl} 0\cdot x_1 + \dots + c_{1s_1}x_{s_1} + \dots & + c_{1n}x_n & = d_1 \\ c_{2s_2}x_{s_2} + \dots & + c_{2n}x_n & = d_2 \\ & \vdots & \vdots \\ c_{rs_r}x_{s_r} + \dots & + c_{rn}x_n & = d_r \\ & 0 & = d_{r+1} \\ & \vdots & \vdots \\ & 0 & = d_m \end{array}$$

d.h. lösbar $\Longleftrightarrow d_{r+1} = \dots = d_m = 0$

x_K für $K \notin \{s_1, .., s_r\}$ kann frei gewählt werden. x_{s_i} kann durch Rücksubstitution nacheinander beginnend bei x_{s_r} bestimmt werden.

zunächst löst man r-te Gleichung nach x_{s_r} auf:

$$x_{s_r} = \frac{1}{c_{r s_r}} \left(d_r - \sum_{k=s_r+1}^{n} c_{rk} x_k \right)$$

mit frei gewählten Werten x_k $(k > s_r)$

Dies setzt man in die $(r-1)$-te Gleichung ein, und löst nach $x_{s_{r-1}}$ auf usw, bis man alle Komponenten $x_{s_1}, \dots, x_{s_r}$ bestimmt hat.

Insbesondere ist die Lösung nach Wahl der ~~x~~ x_k für $k \notin \{s_1, \dots, s_r\}$ eindeutig festgelegt! Am einfachsten ist der Fall $r = n$, denn dann muss $s_1 = 1, s_2 = 2, \dots, s_n = n$ sein und die Rücksubstitution liefert eine eindeutige Lösung $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

LAP Kap 2.

Beispiele :

1. $$(L) \quad \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & \boxed{6} & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{pmatrix}$$

$r = 4, \quad s_1 = 1, \ s_2 = 2, \ s_3 = 3, \ s_4 = 4$

(L) lösbar $\Longleftrightarrow$ $d_5 = 0$

Gilt $d_5 = 0$ ~~$\Rightarrow$~~, so kann man für x_5 einen beliebigen Wert vorgeben und danach x_4 durch die ~~Gl.~~ 4. Gleichung $x_4 + x_5 = d_4 \Leftrightarrow x_4 = d_4 - x_5$ bestimmen. Dann $x_3 = d_3 - x_4 - x_5 = d_3 - d_4 + \cancel{x_5} \cancel{- x_5}$

usw ...

2. $$(L) \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=:\, C_2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_4 \end{pmatrix}$$

$r = 2$

$s_1 = \cancel{1}\, 2$

$s_2 = 4$

lösbar $\Longleftrightarrow d_4 = d_3 = 0$, dann $x_4 = d_2$, x_1, x_3 frei wählbar

$$x_2 = d_1 - 2x_3 - 3x_4 = d_1 - 2x_3 - 3d_2$$

zu Bsp 2: Die Lösungs~~ton~~menge von

(L) ist daher gegeben durch: ($d_4 = d_3 = 0$)

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ d_1 - 2x_3 - 3d_2 \\ x_3 \\ d_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, x_3 \in \mathbb{K} \right\}$$

$$= \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ d_1 - 3d_2 \\ 0 \\ d_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, x_3 \in \mathbb{K} \right\}$$

Insbesondere: $\{ X \in \mathbb{K}^4 \mid C_2 X = 0 \}$

$$= \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

und $\begin{pmatrix} 0 \\ d_1 - 3d_2 \\ 0 \\ d_2 \end{pmatrix}$ ist eine spezielle Lösung

von $C_2 X = D$.