Zu Bsp (1):

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = 0 \iff \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff 0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_n$$

Außerdem gilt $\operatorname{Span}_{\mathbb{K}}(e_1, \dots, e_n) = \mathbb{K}^n$

Schreibweise: e_k heißt auch der k-te Einheitsvektor in $\mathbb{K}^n$.

(2) Die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

sind linear abhängig, denn:

Gesucht $\lambda_1, \dots, \lambda_4$ nicht alle Null mit

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_2 + \lambda_4 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_2 + \lambda_4 &= 0 \\ \lambda_3 + \lambda_4 &= 0 \end{aligned}$$

zB Lösung: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_4 = 1, \lambda_3 = -1$

Kapitel 2 Matrizen und lineare Gleichungssysteme

Definition (Matrix Pl.: , Matrizen)

(a) Ein rechteckiges Schema

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

von Elementen $a_{ij} \in \mathbb{K}$ heißt eine $m \times n$-Matrix mit m Zeilenvektoren

$(a_{i1}, \dots, a_{in})$ $i = 1, \dots, m$ und

n Spaltenvektoren $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ $j = 1, \dots, n$

$\mathbb{K}^{m \times n}$ bezeichne die Menge aller $m \times n$-Matrizen.

LAP Kap 2 (2)

zu Def Matrix: (2) In $\mathbb{K}^{m\times n}$ definiert man eine Addition ~~durch~~ für $A=(a_{ij})$ und $B=(b_{ij})$ durch $A+B := (a_{ij}+b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$

und Skalarmultiplikation für $\lambda \in \mathbb{K}$ durch

$$\lambda A := (\lambda \cdot a_{ij}) = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Satz $\mathbb{K}^{m\times n}$ bildet einen $\mathbb{K}$-Vektorraum mit der Nullmatrix $O_{mn} = (0)_{ij}$ als Nullvektor. Beweis wie $\mathbb{K}^n$.

Definition (Matrixoperationen)

(1) In $\mathbb{K}^{m\times n}$ definiert man die zu ~~A~~ $A=(a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m\times n}$ transponierte Matrix $A^T := (a_{ji}) \in \mathbb{K}^{n\times m}$ (Zeilen und Spalten vertauschen)

zu Def Matrixopn: ② In $\mathbb{C}^{m\times n}$ definiert man die zu $A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{m\times n}$ konjugierte Matrix $\overline{A}:=(\overline{a_{ij}})\in\mathbb{C}^{m\times n}$

Die Matrix $A^* := \overline{A}^T = (\overline{a_{ji}})\in\mathbb{C}^{n\times m}$ heißt die zu A adjungierte Matrix.

③ Ist $m=n$, so heißt $A\in\mathbb{K}^{n\times n}$ quadratisch. Dabei heißt $E=E_n=(\delta_{ij})=\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}$ die $n\times n$ Einheitsmatrix (δ_{ij} Kronecker)

Für quadratisches $A=(a_{ij})\in\mathbb{K}^{n\times n}$ heißt $\operatorname{Spur} A := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ die Spur von A.

LAP Kap 2

Beispiele 1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$

$\Longrightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$

2) $A = \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ i & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2} \Rightarrow A^* = \begin{pmatrix} 1-i & -i \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

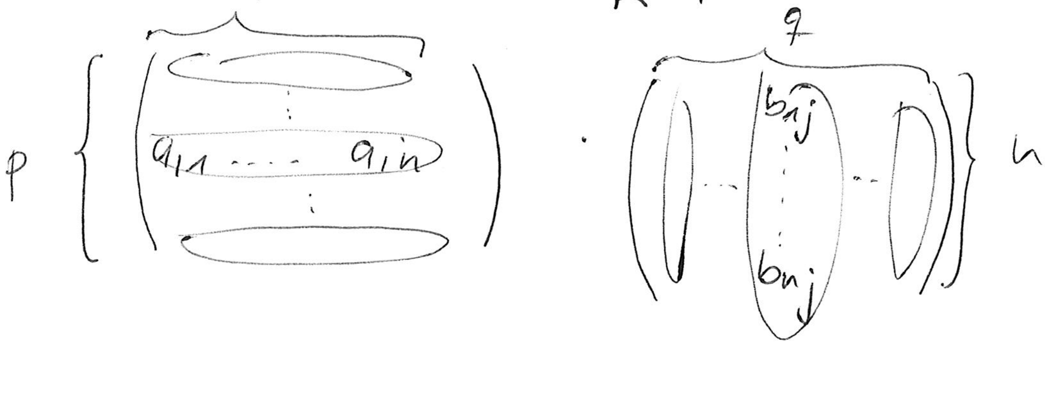
3) $\mathrm{Spur}\begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} = 1 \qquad \mathrm{Spur}(E_n) = n.$

Definition (Matrizenmultiplikation)

Für $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{p\times n}$ und $B = (b_{ij}) \in \mathbb{K}^{n\times q}$

definiert man $C = (c_{ij}) = A \cdot B \in \mathbb{K}^{p\times q}$

durch $c_{ij} := \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$



LAP Kap 2

Bem: 1 $C = A \cdot B$ ~~ist~~ ist nur definiert,

wenn # Spalten von A = # Zeilen von B

Anzahl

2 Für die j-te Spalte von $A \cdot B$, $\begin{pmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{pj} \end{pmatrix}$ gilt:

$$\begin{pmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{pj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k} b_{kj} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{pk} b_{kj} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} b_{kj} \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{pk} \end{pmatrix}$$, d.h.

k-te Spalte von A

die j-te Spalte von $A \cdot B$ ist eine Linearkombination der Spalten von A mit Koeffizienten b_{kj}.

Beispiele: 1 $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ $B := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$

$A \cdot B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $A \cdot B = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 15 & 15 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$B \cdot A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ $B \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

(Im Allgemeinen höchstens eines der Produkte $A \cdot B$ oder $B \cdot A$ definiert)

Beispiele ② $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, dh

auch für quad. Matrizen ist $AB \neq BA$ i. A.

③ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, dh.

$A \cdot B = 0 \not\Rightarrow A = 0$ oder $B = 0$.

Satz (Rechenregeln für die Matrizenmult.)

① Für $A \in \mathbb{K}^{p \times m}$, $B \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $C \in \mathbb{K}^{n \times q}$

gilt $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ in $\mathbb{K}^{p \times q}$

② Für $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ gilt:

$E_m \cdot A = A = A \cdot E_n$

③ Für $A \in \mathbb{K}^{p \times m}$, $B, C \in \mathbb{K}^{m \times q}$ gilt

$A \cdot (B + C) = AB + AC$ und

zu Rechenregeln Matr. mult:

zu ③: für $A, B \in \mathbb{K}^{p\times m}$, $C \in \mathbb{K}^{m\times q}$

gilt $(A+B)\cdot C = AC + BC$.

④ Für $A \in \mathbb{K}^{p\times m}$, $B \in \mathbb{K}^{m\times q}$ gilt

$$(A\cdot B)^T = B^T \cdot A^T, \quad (AB)^* = B^* A^*$$

⑤ ~~A,B~~ Für $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gilt:

$$\mathrm{Spur}(A\cdot B) = \mathrm{Spur}(B\cdot A).$$

Beweis: **zu ①:** Sei $A\cdot(B\cdot C) = (d_{ij})$

und $(A\cdot B)\cdot C = (\tilde{d}_{ij}) \in \mathbb{K}^{p\times q}$. Dann

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}\left(\sum_{\ell=1}^{n} b_{k\ell} c_{\ell j}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{n} a_{ik} b_{k\ell} c_{\ell j} = \sum_{\ell=1}^{n} \cancel{a_{\ell}} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{k\ell}\right)}_{(A\cdot B)_{i\ell}} c_{\ell j}$$

$$= \tilde{d}_{ij}$$

LAP Kap 2

8

Zu Beweis Rechenregeln 2: Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m \times n}$

und $(b_{ij}) = E_m \cdot A$, $(c_{ij}) = A \cdot E_n \in \mathbb{K}^{m \times n}$

$$\Rightarrow b_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \underbrace{\delta_{ik}}_{\text{Kronecker}} a_{kj} = a_{ij} \quad \text{sowie}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \delta_{kj} = a_{ij}$$

3 ist einfach und 4 + 5 Übung.

Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{K}^{m \times 1}$ $(\hat{=} \mathbb{K}^m)$

Wir betrachten das inhomogene lineare Gleichungssystem $(A = (a_{ij})$ $B = (b_i))$

$$(L) \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$