LAP Kap 0 Für $w=1$ heißen die z_k <u>n-te Einheitswurzeln</u>. (10)

<u>Beweis zu $z^n=w$</u>: Gesucht $z=\rho\cdot e^{i\psi}$ mit

$z^n=w$: $z^n=\rho^n e^{in\psi} \overset{!}{=} w = r\cdot e^{i\varphi}$

Genau dann erfüllt, wenn $|z^n|=|w|$ und

$e^{in\psi}=e^{i\varphi} \iff \rho^n=r$ und $n\psi=\varphi+2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$

<u>Betrachte</u>: $z_k := \sqrt[n]{r}\cdot e^{i\psi_k}$ mit $\psi_k := \frac{1}{n}(\varphi+2k\pi)$

$k=0,\dots,n-1$

Diese z_k sind paarweise verschieden, denn

$|\psi_{k_1}-\psi_{k_2}|<2\pi \quad \forall k_1,k_2\in\{0,\dots,n-1\}$ $(\Rightarrow e^{i\psi_{k_1}}\neq e^{i\psi_{k_2}})$

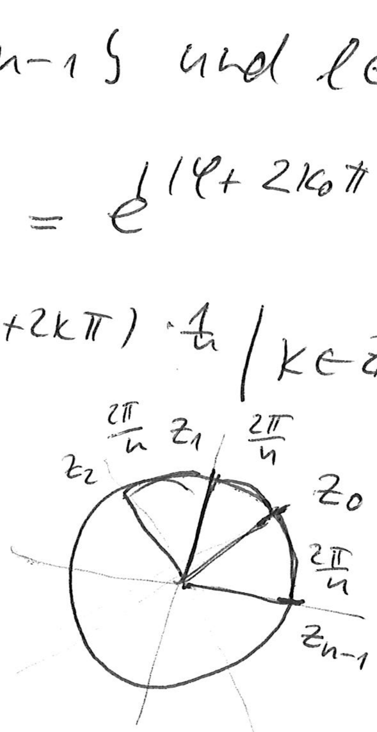
Für $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0,\dots,n-1\}$ gilt $k=k_0+l\cdot n$

mit $k_0\in\{0,\dots,n-1\}$ und $l\in\mathbb{Z}$. Damit

$$e^{i(\varphi+2k\pi)\cdot\frac{1}{n}} = e^{i(\varphi+2k_0\pi)\cdot\frac{1}{n}+2l\pi} = e^{i(\varphi+2k_0\pi)\cdot\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow \{\sqrt[n]{r}\,e^{i(\varphi+2k\pi)\cdot\frac{1}{n}} \mid k\in\mathbb{Z}\} = \{z_k \mid k=0,\dots,n-1\}$$

<u>Geometrisch</u>:



$\rightsquigarrow$ regelmäßiges n-Eck.

Kapitel 1 Vektorräume und Vektorrechnung in $\mathbb{R}^N$ und $\mathbb{C}^N$

Wir betrachten die Mengen die von n-Tupeln $(n \in \mathbb{N})$ $\mathbb{R}^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \,\middle|\, x_i \in \mathbb{R} \text{ für } 1 \leq i \leq n \right\}$

und $\mathbb{C}^n := \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \,\middle|\, z_i \in \mathbb{C} \text{ für } 1 \leq i \leq n \right\}$

Abkürzung im Folgenden: $\mathbb{K}$ immer gleich $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Durch folgende Rechenregeln werden $\mathbb{R}^n$ (bzw $\mathbb{C}^n$) zu Vektorräumen über $\mathbb{R}$ (bzw $\mathbb{C}$):

Vektoraddition: $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$

Skalarmultiplikation: $\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$

für $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ und $\lambda \in \mathbb{K}$.

Der Nullvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ wird auch mit 0 bezeichnet.

In $\mathbb{K}^n$ gelten dann: $\forall\, x, y, z \in \mathbb{K}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

(V1) $(x+y)+z = x+(y+z)$

(V2) $x+y = y+x$

(V3) $\exists\, 0$ (Nullvektor) mit $x+0 = x \ \forall x$

(V4) $\exists\, (-x)$ mit $x+(-x) = 0$

(V5) $(\lambda\mu)x = \lambda\cdot(\mu x)$

(V6) $(\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x$

(V7) $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$

(V8) $1\cdot x = x$, $0\cdot x = 0$

Definition (Vektorraum) Eine Menge $V \neq \emptyset$ heißt Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$-Vektorraum), wenn zwischen den Elementen $x, y \in V$ eine Addition $x+y \in V$ und zwischen den Elementen $\lambda \in \mathbb{K}$ und $x \in V$ eine ~~Skal~~ Skalarmultiplikation $\lambda x \in V$ definiert sind, so dass (V1) – (V8) gelten.

Beispiele

(1) $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ sind VR über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$.

(2) Menge aller Folgen in $\mathbb{K}$

$\text{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{K}) := \{(a_1, a_2, a_3, \dots) \mid a_i \in \mathbb{R} \; \forall i \in \mathbb{N}\}$

ist ein $\mathbb{K}$-VR mit der Addition

$(a_1, a_2, a_3, \dots) + (b_1, b_2, b_3, \dots) := (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots)$

~~und~~, Skalarmult. $\lambda \cdot (a_1, a_2, \dots) := (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots)$

und dem Nullvektor $(0, 0, 0, \dots)$.

(3) Menge aller ~~stetigen~~ Funktionen von $[a,b]$ nach $\mathbb{K}$ $(a < b, \; a, b \in \mathbb{R})$

$\text{Abb}([a,b], \mathbb{K}) := \{ f : [a,b] \to \mathbb{K} \}$

ist ein $\mathbb{K}$-VR durch

$(f_1 + f_2)(x) := f_1(x) + f_2(x) \quad \forall x \in [a,b] \quad \forall f_1, f_2 \in \text{Abb}([a,b], \mathbb{K})$

$(\lambda f_1)(x) := \lambda f_1(x) \quad \forall x \in [a,b]$

Definition (Unterraum, linearer Teilraum)

Es sei V ein $\mathbb{K}$-VR. Eine Teilmenge $\emptyset \neq U \subseteq V$ heißt Unterraum oder linearer Teilraum von V, wenn

(T1) ~~$x, y \in U \Rightarrow$~~ $x+y \in U \quad \forall x,y \in U$

(T2) ~~$\lambda \in \mathbb{K}, x \in U \Rightarrow$~~ $\lambda x \in U \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, x \in U$

gelten.

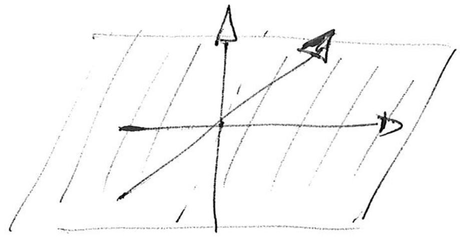
Beobachtung: Ist U ein Unterraum von V, so ist U selbst ein $\mathbb{K}$-VR, dh es gelten (V1)–(V8) in U, denn

zB: $x \in U \Rightarrow (-1) \cdot x = -x \in U$

und $x + (-x) = 0 \in U$

LAP Kap 1

5



Beispiele ①

$$U := \left\{ x \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \,\middle|\, x, y \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

ist ein Unterraum, denn $U \neq \emptyset$ und $\forall\, x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$.

$$\left[x_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + y_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right] + \left[x_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + y_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right]$$

$$= (x_1+x_2)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + (y_1+y_2)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \in U$$

sowie $\forall\, \lambda, x, y \in \mathbb{R}$.

$$\lambda\left[x \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right] = (\lambda x)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + (\lambda y)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \in U$$

② $\ell_\infty(\mathbb{K}) := \{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (a_n) \text{ ist beschränkt} \}$

"Menge der beschränkten Folgen in $\mathbb{K}$"

und $\ell_2(\mathbb{K}) := \{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \}$

"Menge der quadratsummierbaren Folgen in $\mathbb{K}$"

sind Unterräume von $\mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$.

Beweis Übung.

Bsp 3 Fixiere $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$.

Dann ist $U := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0 \right\}$

ein Unterraum von $\mathbb{K}^n$, denn:

Für $x, y \in U$ gilt $\sum_{i=1}^n a_i(x_i + y_i) = \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^n a_i y_i$

$= 0 + 0 = 0 \implies x + y \in U$

Für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $x \in U$ gilt $\sum_{i=1}^n a_i(\lambda x_i) = \lambda \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$

$\implies \lambda x \in U$ (Beachte $U \neq \emptyset$, denn $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in U$)

4 Schnitte von Unterräumen sind wieder Unterräume.

<u>Definition</u> (<u>Linearkombination</u>, <u>lineare Hülle</u>, <u>aufgespannter Unterraum</u>, <u>Erzeugendensystem</u>)

Sei V ein $\mathbb{K}$-VR und seien $v_1, \ldots, v_n \in V$.

(a) Ein Vektor der Form $\sum_{k=1}^n \lambda_k v_k$ mit $\lambda_k \in \mathbb{K}$ für $1 \leq k \leq n$ heißt <u>Linearkombination</u> von $v_1, \ldots, v_n$.

(b)

Zu Def Linearkomb.: Die Menge aller Linearkombinationen von $v_1, \ldots, v_n$ heißt die **lineare Hülle** oder der **aufgespannte Unterraum** von $v_1, \ldots, v_n$: $\mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_n) := \{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \mid \lambda_i \in K \ \forall i \}$

(c) Es sei U ein Unterraum von V.

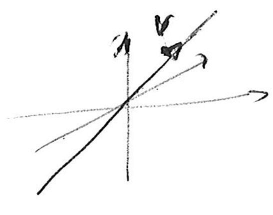
$\{v_1, \ldots, v_n\}$ heißt **Erzeugensystem** von ~~für~~ U,

falls $U = \mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_n)$

Beispiele: 1 Klar: $\mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_n)$ ist immer ein Unterraum, dh. $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ist ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_n)$

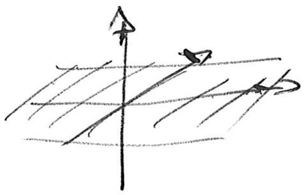
2 $0 \neq v \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathrm{Span}(v) = \{ tv \mid t \in \mathbb{R} \}$

$\triangleq$ Gerade durch den Ursprung 0 mit Richtung v



zu Bsp 3 $\mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$

$$= \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix} \,\middle|\, x,y \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}$$



Ebene durch 0 aufgespannt von $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

Definition (linear unabhängig) Sei V ein $\mathbb{K}$-VR ~~und $v_1, \dots, v_n \in V$~~. Die Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$ heißen linear unabhängig über $\mathbb{K}$, falls gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k = 0 \iff \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

Andernfalls heißen sie linear abhängig.

Bemerkung: $v_1, \dots, v_n$ sind also linear abhängig, falls der Nullvektor als nichttriviale Linearkombination geschrieben werden kann, d.h.

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k = 0 \quad \text{und} \quad \exists\, k_0 \in \{1, \dots, n\} \text{ mit } \lambda_{k_0} \neq 0$$

<u>zu Bem lin. unabh</u>: Man kann dann nach v_{k_0} auflösen und erhält $v_{k_0} = -(\lambda_{k_0})^{-1} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq k_0}}^{n} \lambda_k v_k$

$$= \sum_{k \neq k_0} \left(-\frac{\lambda_k}{\lambda_{k_0}}\right) v_k \quad , \text{d.h.}$$

v_{k_0} ist eine Linearkombination der restlichen v_i.

<u>Zusatz zur Definition</u> Eine beliebige Teilmenge $\emptyset \neq M \subseteq V$ heißt linear unabhängig, wenn je endlich viele Vektoren aus M linear unabhängig sind.

<u>Beispiele</u> 1 Die Vektoren $e_1, \dots, e_n$ aus $\mathbb{K}^n$ definiert durch $e_i := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ i-te Stelle

$$= \begin{pmatrix} \delta_{i1} \\ \vdots \\ \delta_{in} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$ <u>Kronecker-Symbol</u>

sind linear unabhängig, denn