Kapitel 0 Grundlagen

Der Zahlenaufbau und die Mengenlehre wird nicht mathematisch genau im Detail diskutiert; stattdessen: Naives Verständnis von Mengen und Zahlen (Schule):

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ natürliche Zahlen
- $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$ ganze Zahlen
- $\mathbb{Q} = \{$ Brüche $\frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$ $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ rationale Zahlen
- $\mathbb{R}$ reelle Zahlen
- $\mathbb{C}$ komplexe Zahlen

Rechenregeln in $\mathbb{R}$ (Axiome)

$\forall\, a,b,c \in \mathbb{R}$ gilt ($\forall \;\hat{=}$ "Für alle")

Addition: (A1) $(a+b)+c = a+(b+c)$ (Assoziativität)

(A2) $a+b = b+a$ (Kommutativität)

(A3) $\exists$ Nullelement $0 \in \mathbb{R}$ mit $a+0=a$ $\forall a \in \mathbb{R}$

"Es existiert"

(A4) $\forall a$ existiert das zugehörige negative Element $-a$ mit $a+(-a)=0$.

Multiplikation (M1) $(a\cdot b)\cdot c = a(b\cdot c)$ (Assoziativ)

(M2) $ab = ba$ (Kommutativ)

(M3) Es existiert Einselement 1 mit $a\cdot 1 = a$

(M4) Zu jedem $a \neq 0$ gibt es ein inverses Element a^{-1} mit $a\cdot a^{-1} = 1$

Distributivgesetz: (D) $a\cdot(b+c) = ab + a\cdot c$

Alle diese Rechenregeln gelten auch in $\mathbb{Q}$.

Eine Menge mit diesen Operationen und Rechenregeln heißt **Körper**, falls außerdem $1 \neq 0$.

Bsp: $K = \{0, 1\}$

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

Körper mit zwei Elementen.

Der Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$

$$\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{ z = (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \}$$

Addition in $\mathbb{C}$: $z_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{C}$, $z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$

$$z_1 + z_2 := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Multiplikation in $\mathbb{C}$: $\cancel{z_1 \cdot z_2}$

$$z_1 \cdot z_2 := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Auf diese Weise wird $\mathbb{C}$ zum Körper der komplexen Zahlen. Dabei:

$0 := (0,0)$ komplexe 0

$1 := (1,0)$ komplexe 1

$i := (0,1)$ imaginäre Einheit mit

$i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -1$

$-z = -(x,y) := (-x,-y)$ Inverse der Addition

$z^{-1} := \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right)$ Inverse der Mult.

(Man muss noch nachrechnen, dass alle Körperaxiome gelten.) Schreibweise:

$z = (x,y) = (x,0) + (0,y) = x\underbrace{(1,0)}_{=1} + y\underbrace{(0,1)}_{=i}$

(Man definiert $\lambda\cdot(x,y) := (\lambda x, \lambda y)$ für $\lambda, x, y \in \mathbb{R}$)

Man erhält die Normaldarstellung komplexer Zahlen: $z = (x,y) = x + iy$, So dass man in $\mathbb{C}$ wie in $\mathbb{R}$ rechnen kann

$$(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2) = x_1x_2+ix_1y_2+iy_1x_2+i^2y_1y_2$$

$$= (x_1x_2-y_1y_2)+i\,(x_1y_2+x_2y_1)$$

Definition Für $z=(x,y)=x+iy\in\mathbb{C}$ heißt

$x=\operatorname{Re} z$ Realteil von z, $y=\operatorname{Im} z$ Imaginärteil

$|z|:=\sqrt{x^2+y^2}$ Betrag von z.

$\bar{z}:=x-iy=(x,-y)$ die zu z konjugiert komplexe Zahl (Physik auch $\bar{z}=z^*$)

Durch einfaches Nachrechnen folgt: $\forall z_1,z_2,z\in\mathbb{C}$

(1) $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$, $\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$, $\bar{\bar{z}}=z$

(2) $\operatorname{Re} z=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$, $\operatorname{Im} z=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})$

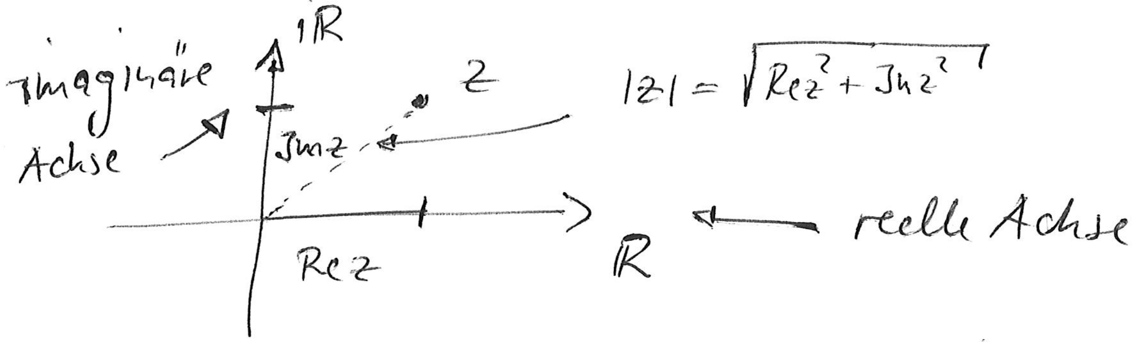
(3) $|\bar{z}|=|z|$, $|z|^2=z\cdot\bar{z}$

$\left(\Rightarrow z\neq 0 \Rightarrow |z|\neq 0 \Rightarrow z\cdot\frac{\bar{z}}{|z|^2}=1 \Rightarrow z^{-1}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}\right)$

(4) $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$

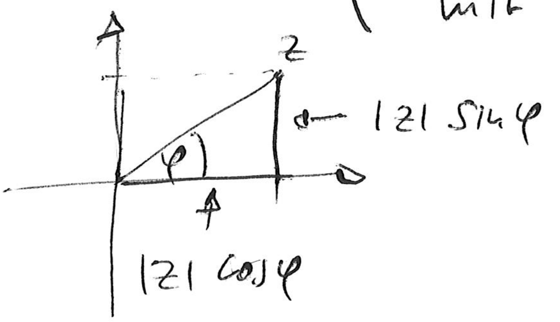
Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ werden ~~a~~ mit den komplexen Zahlen mit Imaginärteil 0 identifiziert;

$$z \in \mathbb{R} \iff \operatorname{Im} z = 0 \iff z = \bar{z}$$



$$|z| = \sqrt{\operatorname{Re} z^2 + \operatorname{Im} z^2}$$

Dies führt zu weiteren Darstellungen komplexer Zahlen: (Beachte $\frac{z}{|z|}$ liegt auf dem Kreis mit Radius 1 um 0, falls $z \neq 0$)



<u>Polardarstellung</u>: Setzt man für $z = x + iy$

$x = |z| \cos\varphi$ und $y = |z| \sin\varphi$ so erhält man $z = r \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$ mit $r = |z|$.

~~und~~ Dabei ist das Argument $\arg z := \varphi$ der Winkel zwischen positiver reeller Achse und dem Strahl nach $z \neq 0$.

Exponentialdarstellung: Definiert man

$e^{iy} := \cos y + i \sin y$ für $y \in \mathbb{R}$ so erhält man

$z = r \cdot e^{i\varphi}$ mit $r = |z|$ und $\varphi = \arg z$

Der Vorteil dieser Darstellung:

Satz Für $z = r \cdot e^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$

und $z_k = r_k e^{i\varphi_k}$ $k = 1,2$ gilt:

(1) $\overline{z} = r \cdot e^{-i\varphi}$ (2) $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \, e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$

(3) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$ $(z_2 \neq 0)$ (4) $z^n = r^n e^{in\varphi}$ $n \in \mathbb{N}$

Beweis: zu (1) $\overline{z} = \overline{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = r(\cos\varphi - i \sin\varphi)$

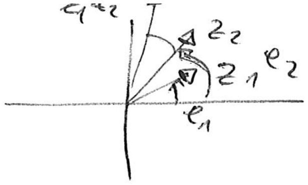
$= r(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)) = r e^{-i\varphi}$

zu (2) $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \{ [\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2]$

$+ i [\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_2 \sin\varphi_1] \}$

$\overset{\text{AddThm}}{=} r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$ □

(3) und (4) ~~wie (?)~~ aus (2)



<u>geometrisch</u>: Multiplikation mit $z = r \cdot e^{i\varphi}$ entspricht einer Dreh-Streckung mit Faktor r und Winkel φ.

<u>Außerdem</u> (<u>wichtig</u>) Exponentialdarstellung ist eindeutig in folgendem Sinn: Für $r_1, r_2, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$ $(r_1, r_2 > 0)$

$$r_1 \cdot e^{i\varphi_1} = r_2 e^{i\varphi_2} \iff r_1 = r_2 \text{ und } \varphi_1 - \varphi_2 \in \{2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

(d.h. im Argument können Vielfache von 2π addiert werden)

Lösungen algebraischer Gleichungen

Algebraische Gleichung: $\underline{P(z) = 0}$ mit

$$P(z) := \sum_{k=0}^{n} c_k z^k \quad \text{mit } c_k \in \mathbb{C} \quad k = 0, \dots, n$$

Gesucht sind also Nullstellen eines komplexen Polynoms P. In $\mathbb{C}$ können alle solchen Gleichungen gelöst werden, zB

$x^2 = -1$ hat in $\mathbb{R}$ keine Lösung, ~~in C~~

in $\mathbb{C}$ gilt: $\{z \in \mathbb{C} \mid z^2 - 1 = 0\} = \{\pm i\}$

Es gilt (Beweis viel später)

Fundamentalsatz der Algebra: Es sei

$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ ein komplexes Polynom

n-ten Grades mit Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$.

Dann besitzt p genau n Nullstellen

(mit Vielfachheit) $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ ~~mit~~

~~p~~ ($z_1, \dots, z_n$ nicht notwendig verschieden)

und es gilt $p(z) = a_n \prod_{k=1}^{n} (z - z_k)$

Beispiel $z^n = w$: Für $n \in \mathbb{N}$ und

$0 \neq w = r \cdot e^{i\varphi} \in \mathbb{C}$ hat die Gleichung

$z^n = w$ genau n verschiedene Lösungen

$z_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i(\varphi + 2k\pi) \cdot \frac{1}{n}}$ $k = 0, \dots, n-1$,

welche die n-ten Wurzeln von w heißen

Diese bilden die Ecken eines regelmäßigen n-Ecks

auf dem Kreis $|z| = \sqrt[n]{r}$. Für $w = 1$ heißen die z_k n-te Einheitswurzeln