# Klausur „Lineare Algebra I“

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

**Fachbereich Mathematik**
**Prof. Dr. Jan Hendrik Bruinier**

**WS 12/13**
**19.03.2013**

Name: ........................................ | Matrikelnummer: ................................

Vorname: ..................................... | Studiengang: ...................................

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | $\sum$ | Note |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punktzahl | 12 | 9 | 4 | 7 | 8 | 4 | 6 | 50 | |
| erreichte Punktzahl | | | | | | | | | |

## Hinweise

Bitte alle Blätter mit Namen und Matrikelnummer versehen, fortlaufend nummerieren und am Schluss der Klausur in das (gefaltete) Aufgabenblatt einlegen. Sie werden mit diesem zusammen abgegeben.

Es müssen alle verwendeten Verfahren und Formeln, die erforderlichen Voraussetzungen, die Rechenwege und sämtliche Zwischenergebnisse angegeben werden.

Die **Klausurdauer** beträgt 90 Minuten.

Als **Hilfsmittel** sind vier eigenhandschriftlich beschriebene A4-Seiten (einseitig) oder zwei eigenhandschriftlich beschriebenes A4-Blatt (beidseitig) zugelassen. Der Raum darf erst nach Klausurende verlassen werden.

Informationen zu den Ergebnissen und der Einsicht der Klausur werden auf der Internetseite zur Veranstaltung bekannt gegeben.

**Wir wünschen Ihnen viel Erfolg bei der Klausur!**

Aufgaben beginnen auf der Rückseite

## 1. Aufgabe (Multiple Choice) (12 Punkte)

In der folgenden Aufgabe gibt es pro Antwortmöglichkeit einen halben Punkt. Diesen erhalten Sie, wenn Sie das Kreuz an der richtigen Stelle setzen. Ist es falsch oder gar nicht gesetzt, erhalten Sie 0 Punkte.

(1) Welche der folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ sind lineare Teilräume des $\mathbb{R}^2$?

| | linearer Teilraum | kein linearer Teilraum |
|---|---|---|
| $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 5\}$ | ☐ | ☐ |
| $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x + 3\}$ | ☐ | ☐ |
| $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3x + 10y = 0\}$ | ☐ | ☐ |
| $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 6x\}$ | ☐ | ☐ |

(2) Welche der folgenden Strukturen sind Gruppen?

| | Gruppe | keine Gruppe |
|---|---|---|
| $(\mathbb{Z}, +)$ | ☐ | ☐ |
| $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \cdot)$ | ☐ | ☐ |
| $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ | ☐ | ☐ |
| $(\mathbb{R}^{n\times n}, \cdot)$ | ☐ | ☐ |

(3) Welche der folgenden Matrizen sind über dem jeweils angegebenen Körper diagonalisierbar?

| | diagonalisierbar | nicht diagonalisierbar |
|---|---|---|
| $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 9 \\ 3 & 1 & 4 & 6 \\ 5 & 4 & 1 & 7 \\ 9 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ | ☐ | ☐ |
| $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 20 \\ -1 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 37 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ | ☐ | ☐ |
| $\begin{pmatrix} 55 & 43 & 85 \\ 0 & 21 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ | ☐ | ☐ |
| $\begin{pmatrix} 22+8i & 6i & 7-23i \\ -6i & 54+87i & 33+90i \\ 7+23i & 33-90i & 1-9i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ | ☐ | ☐ |

(4) Seien $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^{m\times 1}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

| | wahr | falsch |
|---|---|---|
| Wenn $n = m$ ist, dann hat das lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ genau eine Lösung. | ☐ | ☐ |
| Wenn $m < n$ ist, so hat das lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ mehr als eine Lösung. | ☐ | ☐ |
| Wenn $m < n$ ist, so hat das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mehr als eine Lösung. | ☐ | ☐ |
| Wenn $Ax = b$ lösbar ist und $Ax = 0$ mehr als eine Lösung hat, dann ist die Lösung von $Ax = b$ nicht eindeutig. | ☐ | ☐ |

(5) Sei $K$ ein Körper und $V$ ein $K$-Vektorraum mit $v_1, \ldots, v_n \in V$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

| | wahr | falsch |
|---|---|---|
| Ist $V = \langle v_1, \ldots, v_n\rangle$, so ist $\dim(V) = n$. | ☐ | ☐ |
| $(v_1, v_2)$ ist genau dann linear unabhängig, wenn $(v_1 + v_2, v_2)$ linear unabhängig ist. | ☐ | ☐ |
| Bildet $(v_1, \ldots, v_{n-1})$ ein Erzeugendensystem von $V$, so bildet auch $(v_1, \ldots, v_n)$ ein Erzeugendensystem von $V$. | ☐ | ☐ |
| Bildet $(v_1, \ldots, v_{n-1})$ eine Basis von $V$, so bildet auch $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von $V$. | ☐ | ☐ |

(6) Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

| | wahr | falsch |
|---|---|---|
| Sei $K$ ein Körper. Zu jedem normierten Polynom $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in K[x]$ vom Grad $n \geq 1$ gibt es eine Matrix $A \in K^{n\times n}$, sodass das charakteristische Polynom $p_A$ der Matrix $A$ gleich $p$ ist. | ☐ | ☐ |
| Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum. Dann gibt es ein $0 \neq x \in V$ mit $\langle x, x\rangle = 0$. | ☐ | ☐ |
| Die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x \cdot y$ ist linear. | ☐ | ☐ |
| Die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x + y$ ist linear. | ☐ | ☐ |

## 2. Aufgabe (9 Punkte)

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & a \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

(a) Für welche Werte von $a$ ist $A$ diagonalisierbar über $\mathbb{R}$? (4 Punkte)

(b) Sei nun $a = 0$. Geben Sie eine Diagonalmatrix $D$ und eine Matrix $P$ an, sodass $D = P^{-1}AP$ gilt. (5 Punkte)

## 3. Aufgabe (4 Punkte)

Gibt es eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, mit

$$\mathrm{Bild}(\varphi) = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\\8\end{pmatrix}\right), \qquad \mathrm{Kern}(\varphi) = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix}2\\6\\0\\3\end{pmatrix}\right)\ ?$$

## 4. Aufgabe (7 Punkte)

Sei $\alpha \in \mathbb{Q}$ und

$$A := \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}.$$

(a) Für welche $\alpha \in \mathbb{Q}$ ist $A$ invertierbar? (2 Punkte)

(b) Sei nun $\alpha = 1$. Bestimmen Sie $A^{-1}$. (5 Punkte)

## 5. Aufgabe (8 Punkte)

Sei $\varphi$ die lineare Abbildung gegeben durch

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{Q}^{2\times 2} &\to \mathbb{Q}^{2\times 2} \\ M &\mapsto M \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Weiter seien Basen

$$B = \left( b_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, b_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

und

$$C = \left( c_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, c_3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, c_4 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \right)$$

von $\mathbb{Q}^{2\times 2}$ gegeben. Berechnen Sie die Koordinatenmatrix $\mathscr{M}_C^B(\varphi)$.

## 6. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $K$ ein Körper und seien $A, B \in K^{n\times n}$ symmetrisch, also $A = A^t$ und $B = B^t$. Zeigen Sie, dass $AB$ genau dann symmetrisch ist, wenn $AB = BA$ gilt.

## 7. Aufgabe (6 Punkte)

Sei $V$ ein Vektorraum und $f$ ein Automorphismus von $V$. Zeigen Sie: ist $\lambda$ Eigenwert von $f$, dann ist $\frac{1}{\lambda}$ Eigenwert von $f^{-1}$.
*Hinweis:* Kann ein Automorphismus Null als Eigenwert haben?