<u>Satz 5</u>: Sei (V,q) n.a. quadr. Raum.
Ist $0 \neq u \in V$ isotrop, so ex $v \in V$ mit
$H = \mathrm{Lin}(u,v)$ ist hyperbolische Ebene
und
$V = H \oplus W$ (orth. Summe)
für einen n.a. Unterraum $W \subset V$.

<u>Bew</u>:

- q ist n.a. $\Rightarrow \exists\, v \in V$ mit $\beta(u,v) = 1$
  Sei $H = \mathrm{Lin}(u,v) \subset V$.
  H ist isotrop, denn $H = 2$ und
  H ist n.a. (Denn die Strukturmatrix
  zu u,v ist $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & * \end{pmatrix} \Rightarrow$ invertierbar).
  $\Rightarrow$ Satz 3 + Bem 4 $\Rightarrow$ H ist Hyp. Ebene.
- Sei $W = H^{\perp} \subset V$.
  $\overset{\text{Bem 2}}{\Longrightarrow}$ $V = H \oplus W$ (q_H ist n.a.). $\square$

<u>Satz 6</u>: Sei (V,q) n.a. quadr. Raum
der Dim $2 \ldots$
Dann besitzt (V,q) eine orthogonale
Summenzerlegung
$$V = H_1 \oplus \ldots \oplus H_m \oplus W,$$
wobei $H_i \cong$ hyperbolische Ebene

und $W \subset V$ u.a. anisotroper Unterraum.

Die Summanden sind bis auf Isometrie eind. ~~d~~ durch (V,q) best.

Die Zahl m ist eind. durch (V,q) best.

Es gilt m = Dimension eines maximalen total isotropen Teilraums.

m heißt Witt-Index von (V,q).

Bew: Die Existenz einer solchen Zerlegung folgt induktiv aus Satz 5.

Eindeutigkeit: Sei

$$V = H_1' \oplus \ldots \oplus H_k' \oplus W'$$

eine zweite Zerlegung.

OBdA $m \geq k$.

$\underset{\text{Wittscher Kürzungssatz}}{\Longrightarrow}$

$$H_{k+1} \oplus \ldots \oplus H_m \oplus W \cong W'$$

~~l~~.S. isotrop, falls $m > k$, r.S. anisotrop

$\Rightarrow$ $m = k$ und $W \cong W'$. $\square$

Bem 7: Ist (V,q) u.a. und isotrop, so stellt q jedes $\alpha \in K$ dar.

§6 Die orthogonale Gruppe

(V,q) quadr Raum, n.a.

Für $x,y\in V$ mißt $q(x-y)\in K$ den „Abstand" von x,y.

Satz 1:

Sei $f: V\to V$ eine distanztreue Abb, d.h. es gelte
$$q(f(x)-f(y)) = q(x-y) \quad \forall x,y\in V. \quad (*)$$
Dann ist f eine affine Abb, d.h. es ex $v\in V$ und eine lin Abb $s: V\to V$, so daß
$$f(x) = s(x)+v \quad \forall x\in V.$$
Hierbei sind s,v eind. best. und s ist Isometrie.

Bew: 1) Setze $v := f(0)$ und definiere $s: V\to V$ durch $s(x) = f(x)-v$.

Z.z: s ist linear.

$(*) \Rightarrow q(s(x)-s(y)) = q(x-y) \quad \forall x,y\in V$

Es gilt $s(0) = f(0)-v = 0$.

$\overset{y=0}{\Rightarrow} q(s(x)) = q(x) \quad \forall x\in V$

Es gilt $q(sx-sy) = q(sx) - \cancel{2}\beta(sx,sy) + q(sy)$

$\Rightarrow -\beta(sx,sy) = q(x-y)-q(x)-q(y) = \beta(x,-y)$

$\Rightarrow \beta(sx,sy) = \beta(x,y) \quad \forall x,y\in V \quad (**)$ 11.30.

$\Rightarrow s$ bildet OB auf OB ab

2) **Beh:** BE $s(ax+by)-as(x)-bs(y) \perp s(z) \quad \forall z\in V$

In der Tat: ~~$\beta(s(ax+by), s(z))=$~~

$$\beta(s(ax+by)-as(x)-bs(y), s(z))$$
$$\overset{\beta \text{ bil.}}{=} \beta(s(ax+by), s(z)) - a\beta(s(x), s(z)) - b\beta(s(y), s(z))$$
$$= \beta(ax+by, z) - a\beta(x,z) - b\beta(y,z)$$
$$= 0$$

3) <u>Zeige</u>: $s(V)$ erzeugt V

Dann folgt aus 2) daß $s(ax+by)-as(x)-bs(y)=0$, also s linear (benutze dabei, dass q n.a.).

Sei dazu $b_1, \dots, b_n$ OB von V.

$$\Rightarrow \quad \beta(s(b_i), s(b_j)) = \beta(b_i, b_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \neq 0, & i = j \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $s(b_1), \dots, s(b_n)$ ist OB von V

$= \operatorname{Lin}(s(V)) = V$.

4) (**) zeigt, daß β Isometrie ist.

v ist eind. best. als $f(0)$

und ~~$s(x)$~~ s durch $s(x) = f(x) - v$. $\square$

<u>Def</u>: Sei (V,q) q.R.

$$O(V,q) = \{ s : V \to V \, ; \, s \text{ ist Isometrie} \} \subset GL(V)$$

heißt <u>orthogonale Gruppe</u> von (V,q).

~~Die~~ <u>spezielle orth. Gruppe</u> von (V,q) ist $SO(V,q) = \{ s \in O(V,q) \, ; \, \det(s) = 1 \}$.

<u>Bsp</u>: Für $V = K^n$ mit $q = q_E = [1, \dots, 1]$ schreibt man einfach

$$O(n,K) = O(K^n, q_E), \quad SO(n,K)$$

Bem 2: $O(n,K) = \{ S \in K^{n\times n} ;\ S^t S = E_n \}$

$SO(n,K) = \{ S \in K^{n\times n} ;\ S^t S = E_n, \det S = 1 \}$.

Bem 3: Sei $A \in K^{n\times n}$, $A = A^t$.

$O(K^n, q_A) = \{ S \in GL(n,K) ;\ S^t A S = A \}$

Bem 4: Sei (V,q) n.a. und $s : V \to V$ Isometrie. Dann gilt $\det s = \pm 1$.

Bew: ~~Sei S~~ Genügt $(V,q) = (K^n, q_A)$ zu betrachten, wobei $\det A \neq 0$.

$$\det(S^t A S) = \det(A)$$

$$\Rightarrow \det(S)^2 \det(A) = \det(A)$$

$$\Rightarrow \det(S)^2 = 1. \qquad \square$$

Beispiele von Isometrien erhält man durch Spiegelungen.

Sei (V,q) n.a. q.R. der Dim n.

Sei $H \subset V$ Hyperebene, also ein $(n-1)$-dim. Teilraum.

Sei H n.a.

Dann ist $V = H \oplus H^\perp$.

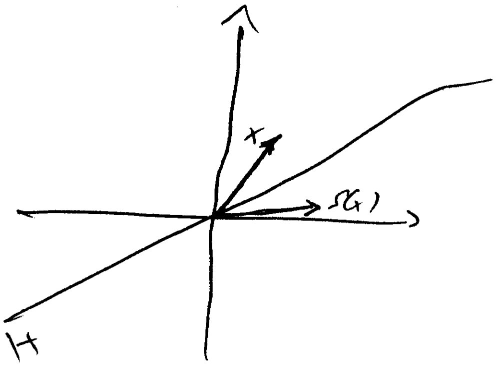
Sei $s = s_H$ die lineare Abb $s : V \to V$, def durch

$$s(x) = x \quad \forall x \in H$$

$$s(y) = -y \quad \forall y \in H^\perp.$$

s heißt <u>Spiegelung</u> an der Hyperebene H.

- Es gilt $s^2 = id_V$.
- s ist Isometrie von (V, q).



<u>Bem 5</u>:
Sei $s : V \to V$ Isometrie, so daß
$$H = \{x \in V ;\ sx = x\} \subset V$$
eine lin. Hyperebene ist. Dann ist $s = s_H$ die Spiegelung an H oder $s = id_V$.

<u>Bew</u>: Es ist $\dim H^\perp = 1$. (H ist n.a.!)
Außerdem gilt $s(H^\perp) \subset H^\perp$, denn für $y \in H^\perp$, $x \in H$ ist
$$\beta(sy, x) = \beta(sy, sx) = \beta(y, x) = 0.$$
$\Rightarrow$ Für $0 \neq y \in H^\perp$ ist $s(y) = \lambda y$ mit $\lambda \in K$.
Es ist $q(y) \neq 0$, weil (V, q) n.a.
$$\Rightarrow 0 \neq q(y) = q(sy) = \lambda^2 q(y)$$
$$\Rightarrow \lambda^2 = 1$$
$$\overset{s \neq id}{\Rightarrow} \lambda = -1.$$
$$\Rightarrow s = s_H. \qquad \square$$

<u>Bem 6</u>: Seien $V, H, s = s_H$ wie oben.
Sei $b_1, \dots, b_{n-1}$ eine Basis von H und b_n eine Basis von $H^\perp$. Dann ist $b_1, \dots, b_n$ Basis von V und s hat die Koor-

dinaten - Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$

Insbesondere ist $\det s = -1$.

Lem 7: $V, H, s = s_H$ wie oben.
Sei $0 \neq y_0 \in H^\perp$. Dann gilt

$$s(v) = v - 2\frac{\beta(v, y_0)}{\beta(y_0, y_0)} y_0 \quad \forall v \in V.$$

Bew: Übung.

Sei (V, q) n.a. q. R., $\dim V = n$.
Sei $s: V \to V$ Isometrie.
Falls es einen anisotropen Vektor $x \in V$ gibt mit $s(x) = x$,
~~So~~ so ist $V = x \oplus x^\perp$ und
$s|_{x^\perp}$ ist Isometrie $x^\perp \to x^\perp$.
=> Reduktion auf Raum kleinerer Dim.

Lemma 8:
Sei $s: V \to V$ Isometrie. Sei $v \in V$ ein anisotroper Vektor, so daß auch

$$s(v) - v$$

anisotrop ist. Dann ex eine Spiegelung s_0, so daß $s_0 s$ den Vektor v als Fixpunkt hat.

Bew: Sei $H \subset V$ die Hyperebene $(sv-v)^\perp$.
Da $sv-v$ anisotrop, ist H n.a und
$$V = H \oplus K(sv-v).$$
Sei $s_0 = s_H$.
Es gilt $\beta(sv+v, sv-v) = \beta(sv,sv) - \beta(v,v) = 0$

$\Rightarrow sv+v \in H$

$\Rightarrow s_0(sv+v) = sv+v$

Andererseits $s_0(sv-v) = -sv+v$ $\Big\}\ +$

$\Rightarrow s_0 s v = v.$ $\square$

Erinnerung: Die symmetrische Gruppe S_n wird durch ~~Spiegelungen~~ Transpositionen erzeugt.
Wir zeigen nun, daß die orth. Gruppe durch Spiegelungen erzeugt wird.

Satz 7: Sei (V,q) n.a.q.R der Dimension n. Dann ist jede Isometrie $s \in O(V,q)$ ein Produkt von höchstens n Spiegelungen.

Bew: Wir beweisen hier nur den Fall, daß (V,q) anisotrop ist. Für den allg. Fall siehe Lorenz, Satz 4, p. 56.

1) Ang. es ex. $v \in V$, $q(v) \neq 0$, mit
$$sv = v.$$
Sei $H = v^\perp \subset V$.