$\Rightarrow$ Frage: Wann sind zwei Diagonalformen $[a_1, \ldots, a_n]$, $[b_1, \ldots, b_n]$ auf K^n äquivalent über K?

$\Longleftrightarrow \exists\, S \in GL_n(K)$: $\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} = S^t \begin{pmatrix} b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & b_n \end{pmatrix} S$

Antw: Hängt von K ab.
„Einfach" über $\mathbb{C}, \mathbb{R}$ (s.u.)
„Schwierig" über $\mathbb{Q}$ „Satz von Hasse-Minkowski".

Über $\mathbb{C}$:

Lem 5: Sei q eine n.a. qF auf dem $\mathbb{C}$-VR V. Dann gibt es eine Basis $b_1, \ldots, b_n$, so daß die darstellende Matrix ~~die E_n~~

$$B = 2 \cdot E_n$$

ist. D.h. q ist äquivalent zur Einheitsform $[1, 1, \ldots, 1]$ auf $\mathbb{C}^n$.

Bew: Sei $c_1, \ldots, c_n$ eine OB von V. und ~~$\gamma_i = \frac{1}{2}\beta(c_i, c_i) = q(c_i)$~~.

$\gamma_i \in \mathbb{C}$ mit $\gamma_i^2 = q(c_i) = \frac{1}{2}\beta(c_i, c_i)$.
(Ex, da $\mathbb{C}$ alg. abg.)

Setze $b_i = \frac{1}{\gamma_i} \cdot c_i$. ($\gamma_i \neq 0$, da q n.a.)

Dann ist $b_1, \ldots, b_n$ OB mit

$$q(b_i) = \frac{1}{\gamma_i^2} q(c_i) = 1. \qquad \square$$

Satz 6 (Kürzungssatz von Witt)

Seien $k, n \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k < n$. Seien $a_1, \dots, a_n$ und $b_1, \dots, b_n \in K^* = K \setminus \{0\}$.

Falls

$$(*) \quad \begin{cases} [a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n] \simeq [b_1, \dots, b_k, b_{k+1}, \dots, b_n] & \text{und} \\ [a_1, \dots, a_k] \simeq [b_1, \dots, b_k] \end{cases}$$

so folgt

$$[a_{k+1}, \dots, a_n] \simeq [b_{k+1}, \dots, b_n].$$

Bew: 1.) Aus $(*)$ folgt direkt

$$(**) \quad [a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n] \simeq [a_1, \dots, a_k, b_{k+1}, \dots, b_n]$$

$\exists S \in GL_n(K): \quad S^t \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & b_n \end{pmatrix}$

$\exists T_0 \in GL_k(K): \quad T_0^t \begin{pmatrix} b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & b_k \end{pmatrix} T_0 = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_k \end{pmatrix}$

$\Rightarrow T = \begin{pmatrix} T_0 & \\ & E_{n-k} \end{pmatrix} \in GL_n(K): \quad T^t \begin{pmatrix} b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & b_n \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} a_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & a_k & & & \\ & & & b_{k+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & b_n \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad (ST)^t \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} ST = \begin{pmatrix} a_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & a_k & & & \\ & & & b_{k+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & b_n \end{pmatrix}$

2.) ZZ: $(**) \Rightarrow$ Beh.

Bew durch Ind nach k.

Sei $k = 1$ (und n beliebig).

$(**)$ bedeutet: $\exists T \in GL_n(K)$ mit

$$T^t \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n \end{pmatrix}$$

Schreibe $A = \begin{pmatrix} a_2 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} b_2 & & \\ & \ddots & \\ & & b_n \end{pmatrix}$

$$T = \left(\begin{array}{c|c} c & v^t \\ \hline u & S \end{array}\right)$$ mit $c \in K$, $u, v \in K^{n-1}$, $S \in K^{(n-1)\times(n-1)}$.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} c & u^t \\ v & S^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & v^t \\ u & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} ca_1 & u^tA \\ va_1 & S^tA \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & v^t \\ u & S \end{pmatrix} = \text{"}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} c^2a_1 + u^tAu & ca_1v^t + u^tAS \\ va_1c + S^tAu & va_1v^t + S^tAS \end{pmatrix} = \text{"}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^tAu = a_1(1-c^2) \\ S^tAu = -a_1cv \\ S^tAS + a_1vv^t = B \end{cases}$$

Gesucht: $M \in K^{(n-1)\times(n-1)}$ mit

(***) $\quad M^tAM = B$ $\quad$ ($\Rightarrow M \in GL_{n-1}(K)$ wegen $\det M \neq 0$)

Ansatz: $M = S + \lambda uv^t$, $\lambda \in K$

$\Rightarrow$ (***) wird zu $(S^t + \lambda vu^t)A(S + \lambda uv^t) = B$

$$\Leftrightarrow \underbrace{S^tAS}_{B - a_1vv^t} + \lambda v\underbrace{u^tAS}_{-a_1cv^t} + \lambda\underbrace{S^tAu}_{-a_1cv}v^t + \lambda^2 v\underbrace{u^tAu}_{a_1(1-c^2)}v^t = B$$

$$\Leftrightarrow \cancel{S^tAS}\ B - a_1vv^t - 2\lambda a_1cvv^t + \lambda^2 a_1(1-c^2)vv^t = B$$

$$\Leftrightarrow a_1(-1 - 2\lambda c + \lambda^2 - c^2\lambda^2) = 0$$

$\overset{a_1 \neq 0}{\Longleftrightarrow} \quad (1+c\lambda)^2 = \lambda^2$

Wenn λ dieser Gl genügt, so gilt (***) für $M = S + \lambda u v^t$.

$$1 + 2c\lambda + c^2\lambda^2 - \lambda^2 = 0$$

Lösbar für $c^2 = 1$. ✓

$c^2 \neq 1$:

$$\Leftrightarrow (c^2-1)\lambda^2 + 2c\lambda + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + \frac{2c}{c^2-1}\lambda + \frac{1}{c^2-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\lambda + \frac{c}{c^2-1}\right)^2 - \frac{c^2}{(c^2-1)^2} + \frac{1}{c^2-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\lambda + \frac{c}{c^2-1}\right)^2 = \frac{c^2}{(c^2-1)^2} - \frac{c^2-1}{(c^2-1)^2}$$

$$\left(\lambda + \frac{c}{c^2-1}\right)^2 = \frac{1}{(c^2-1)^2}$$

$$\Leftarrow \left(\lambda + \frac{c}{c^2-1}\right) = \pm \frac{1}{c^2-1}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = -\frac{c}{c^2-1} \pm \frac{1}{c^2-1} = -\frac{c \mp 1}{c^2-1} = -\frac{1}{c \pm 1}$$

$\Rightarrow$ In der Tat: $\lambda = -\frac{1}{c \pm 1}$ ist Lsg der Gl. ✓

Dies zeigt die Bh für $k = 1$.

Sei nun $k > 1$ und die Bh bew für $k-1$ (und alle n). Dann folgt aus

(**) $[a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n] \simeq [a_1, \ldots, a_k, b_{k+1}, \ldots, b_n]$

sofort nach Ind-Ann

$$[a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n] \simeq [a_k, b_{k+1}, \ldots, b_n]$$

$k=1$-Fall $\Rightarrow$

$$[a_{k+1},\dots,a_n]\simeq[b_{k+1},\dots,b_n].\ \square$$

<u>Bem 7</u>: Für beliebige $c_i\in K^*$ gilt die Äquivalenz von Diagonalformen

$$[c_1^2a_1,c_2^2a_2,\dots,c_n^2a_n]\simeq[b_1,\dots,b_n]$$

<u>Bew</u>: Übung.

<u>Satz 8</u>: (Witt'sche Relation)

Seien $a,b\in K^*$ mit $a+b\neq 0$. Dann gilt
$[a,b]\simeq[a+b,(a+b)ab]$.

<u>Bew</u>: Sei $q=[a,b]$. Dann gilt für $x=\binom{x_1}{x_2}\in K^2$: $q(x)=ax_1^2+bx_2^2$.

$\Rightarrow$ $a+b$ wird von q dargestellt (durch $x=\binom{1}{1}$)

$\overset{a+b\neq 0}{\Rightarrow}$
$$q=[a,b]\simeq[a+b,t]$$
für ein geeignetes $t\in K$.
(Nehme $0\neq y\in\binom{1}{1}^\perp$. Dann tut es $t=q(y)$.)
Die Gram-Det unterscheiden sich um ein Quadrat $\neq 0$. $\Rightarrow$ $\exists\,\alpha\in K^\times$ mit
$$a\cdot b=\alpha^2(a+b)\cdot t$$
$$\Rightarrow\ t=\frac{a\cdot b}{\alpha^2(a+b)}=\frac{(a+b)\,a\cdot b}{(\alpha(a+b))^2}$$
$\overset{\text{Bem 7}}{\Rightarrow}$ Beh. $\square$

Elementare quadratische Umformungen einer Diagonalform $(c_1, \dots, c_n)$, $c_i \in K^*$:

i) Vertauschen von c_i und c_j

ii) Multiplikation eines Koeff c_i mit λ^2, $\lambda \in K$

iii) Ersetzen von c_1, c_2 durch $c_1 + c_2, (c_1+c_2)c_1c_2$, falls $c_1 + c_2 \neq 0$.

- Sie überführen eine Diagonalform in eine äquivalente q. F.

Satz 9:

Seien $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in K^*$ und sei

$$[a_1, \dots, a_n] \simeq [b_1, \dots, b_n]. \qquad (*)$$

Dann läßt sich $[a_1, \dots, a_n]$ durch el. quadr. Umformungen in ~~eine Diagonalform überführt~~ $[b_1, \dots, b_n]$ überführen.

Bew: b_1 wird von $[a_1, \dots, a_n]$ dargestellt.

$\Rightarrow \exists\, x_i \in K^*$: $b_1 = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \dots + a_kx_k^2$.

1) OBdA $\sum_{i=1}^{k'} a_ix_i^2 \neq 0 \quad \forall\, k' = 1, \dots, k$.

Denn falls nicht, so kann man dies durch Umformungen vom Typ i) erreichen.

2) Ersetze $a_i \to a_ix_i^2$, $i = 1, \dots, k$.

$\Rightarrow$ OEdA $x_1 = \ldots = x_k = 1$,

$b_1 = a_1 + \ldots + a_k$

3) Wende nun Umformungen vom Typ (iii) an. Überführe $a_1 + a_2 \neq 0$!

$$[a_1, \ldots, a_n] \overset{(iii)}{\longrightarrow} [a_1 + a_2, *, a_3, \ldots, a_n]$$
$$\overset{(i)}{\longrightarrow} [a_1 + a_2, a_3, \ldots, a_n, *]$$
$$\overset{(iii)}{\longrightarrow} [a_1 + a_2 + a_3, *, a_4, \ldots, a_n, *]$$
$$\longrightarrow \ldots$$
$$\longrightarrow [a_1 + a_2 + \ldots + a_k, *, \ldots, *] =: [b_1, a_2', \ldots, a_n']$$

mit $a_2', \ldots, a_n' \in K^*$.

Wegen $(*)$ gilt

$$[b_1, a_2', \ldots, a_n'] \simeq [b_1, \ldots, b_n]$$
$$\overset{\text{Satz 6}}{\Longrightarrow} [a_2', \ldots, a_n'] \simeq [b_2, \ldots, b_n].$$

$\Rightarrow$ Beh. folgt per Induktion. $\square$

§5 Isotrope Vektoren

Sei (V, q) quadr. Raum über K.
$U \subset V$ K-Unter-VR.
$q_U : U \to K$ Einschränkung von q auf U.
(U, q_U) ist quadr. Raum.

Bem 1: Falls (V, q) n.a., so kann (U, q_U) trotzdem ausgeartet sein.

Falls (V,q) ausgeartet, so kann (U,q_U) trotzdem n.a. sein.

<u>Bem 2</u>: Sei (V,q) n.a. und $U\subset V$ Teilraum. Es sind äqu.:

i) q_U ist n.a.

ii) $U \cap U^\perp = 0$.

iii) $q_{U^\perp}$ ist n.a.

iv) $V = U + U^\perp$

v) $V = U \oplus U^\perp$

vi) Jede OB von (U,q_U) lässt sich zu OB von (V,q) fortsetzen.

<u>Bew</u>: i $\Leftrightarrow$ ii : Def von „q_U n.a." (q n.a. braucht man nicht)

ii $\Leftrightarrow$ iii : Genauso, wegen $U^{\perp\perp} = U$.
(hier braucht man q n.a.)

ii $\Leftrightarrow$ iv $\Leftrightarrow$ v : Folgt aus $\dim U + \dim U^\perp = n$
(hier braucht man q n.a.

vi: Übung $\square$

<u>Def</u>: Sei (V,q) quadr. Raum.
$v \in V$ heißt <u>isotrop</u>, falls $q(v)=0$.
" " <u>anisotrop</u>, " $q(v)\neq 0$.
~~$U\subset V$ heißt isotrop~~
q heißt <u>isotrop</u>, falls V einen isotropen Vektor $v\neq 0$ enthält.
$U\subset V$ heißt <u>total isotrop</u>, falls

$q(v) = 0 \quad \forall\; v \in U.$

Bsp: i) Sei $A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$ symmetrisch.
q_A ist isotrope q. F. auf K^n
$\Longleftrightarrow$ $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = 0$ hat nicht-triviale Lsg.

ii) Die Diagonalform $q = [1, -1]$ auf K^2 ist n.a. und isotrop, denn
$q\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = 0.$

Satz 3

Sei (V, q) isotroper n.a. ~~quadr.~~ quadr. Raum der Dim 2. Dann ex $u, v \in V$ mit
$$q(u) = q(v) = 0, \quad \beta(u,v) = 1.$$
u, v bilden Basis von V und die zug Strukturmatrix ist $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

Bew: Sei $u \in V$, $u \neq 0$ mit $q(u) = 0$.
Da (V, q) n.a. ex $\tilde{v} \in V$ mit
$$\beta(u, \tilde{v}) \neq 0$$
$\Rightarrow$ OEdA
$$\beta(u, \tilde{v}) = 1.$$
Für $\alpha \in K$ gilt $\beta(u, \alpha u + \tilde{v}) = 1$ und
$$q(\alpha u + \tilde{v}) = q(\alpha u) + \beta(\alpha u, \tilde{v}) + q(\tilde{v})$$
$$= \alpha \beta(u, \tilde{v}) + q(\tilde{v})$$
$$= \alpha + q(\tilde{v}).$$

$\Rightarrow$ Für $\alpha = -q(\tilde{v})$ hat

$$v = \alpha u + \tilde{v}$$

die gewünschte Eigenschaft. $\square$

Bez: Eine Basis wie in Satz 3 heißt hyperbolische Basis.

Bem 4: Bis auf Isometrie gibt es nur einen n.a. isotropen q.R. der Dim 2. Man nennt ihn hyperbolische Ebene.

Bew: Folgt aus Satz 3. $\square$

Def: (Orthogonale Summe)

Sei (V, q) q.R. und $U_1, \dots, U_s \subset V$ seien Unterräume. Gilt

i) $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_s$ und

ii) $U_i \perp U_j \quad \forall\ i \neq j,\ 1 \leq i, j \leq s$

so heißt V orthogonale Summe der U_i.

Bsp: • Ist (V, q) n.a. und $U \subset V$ Teilraum, q_U n.a. so ist

$$V = U \oplus U^\perp \quad \text{orth. Summe.}$$

• Ist (V, q) die orth. Summe von hyp. Ebenen

$$V = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_s,$$

so heißt (V, q) ein hyperbolischer Raum.