Def: Seien $B, C \in K^{n \times n}$. C heißt kongruent zu B (über K), falls es $S \in GL(n,K)$ gibt, so daß

$$C = S^t B S.$$

Schreibe: $C \simeq B$

Bem: $C \simeq B$ falls es K-VR V gibt und eine Bilinearform β auf V, so daß sowohl B als auch C als Koeffizientenmatrizen (Gram-Matrizen) von β (bzgl. geeigneter Basen) auftreten.

Def: Eine Bilinearform $\beta: V \times V \to K$ heißt symmetrisch, falls

$$\beta(x,y) = \beta(y,x) \quad \forall\, x,y \in V$$

Bem: Sei $\beta: V \times V \to K$ Bilinearform und sei B die Matrix von β bezüglich einer Basis von V.
β ist symmetrisch $\iff B = B^t$.

Sei $\beta: V \times W \to K$ eine Bilinearform.
Sei $f: V \to V$ Endomorphismus.
Dann ist auch

$$\beta_f: V \times W \to K, \quad \beta_f(x,y) = \beta(f(x),y)$$

eine Bilinearform.

Frage: Erhält man jede Bil-Form
$\gamma: V\times W \to K$ als ein β_f?

Satz: Seien V, W endl. dim K-VR
mit $\dim V = \dim W$ und sei
$$\beta: V\times W \to K$$
eine nicht ausgeartete Bil-Form.
Zu jeder Bil-Form $\gamma: V\times W \to K$
ex genau ein End. $f: V \to V$, so
daß $\gamma = \beta_f$, d.h.
$$\gamma(x,y) = \beta(f(x),y) \quad \forall x\in V, y\in W.$$
(Analog für die zweite Komponente)

Bew: Betrachte die Abb
$$\beta_1: V \to W^*, \quad x \mapsto \beta(x,\cdot) = (y\mapsto \beta(x,y)).$$
β nicht ausgeartet $\Rightarrow$ β_1 inj
$\overset{\dim V = \dim W^*}{\Longrightarrow}$ β_1 ist Isom.
Es gilt
$$\gamma(x,y) = \beta(f(x),y) \quad \forall x,y$$
$\Leftrightarrow$ $\gamma_1 = \beta_1 \circ f$
$\Leftrightarrow$ $\beta_1^{-1}\circ \gamma_1 = f$.
$\Rightarrow$ f eindeutig (falls es ex).

Existenz: Definiere $f := \beta_1^{-1}\circ\gamma_1$.
Dann hat f die geforderte Eigenschaft. $\square$

Satz und Def: (mit $\dim V = \dim W$)
Seien V, W endl. dim VR, $\beta: V\times W \to K$

eine nicht ausgeartete Bilinearform. Zu jedem End. $h: V \to V$ ex. genau ein End. $h^*: W \to W$ mit

$$\beta(h(x), y) = \beta(x, h^*(y)) \quad \forall x \in V, y \in W.$$

(Analog für den zweiten Eintrag, bez: $^*h$.)

Bew: Nach dem vorherigen Satz ex. zu $\beta_h: V \times W \to K$ ein $h^*: W \to W$ mit

$$\beta_h(x, y) = \beta(x, h^* y) \quad \forall x, y$$

$$\Rightarrow \beta(hx, y) = \beta(x, h^* y). \quad \square$$

Man nennt h^* den zu h (rechts) adjungierten Endomorphismus (bezüglich β)

Bem: Es gilt $^*(h^*) = h$

Bem: Seien V, W, β wie im vorherigen Satz. Seien $v_1, \dots, v_n$ und $w_1, \dots, w_n$ Basen von V bzw. W und sei B die zug. Strukturmatrix von β. Hat ein End. h von V bezügl. $v_1, \dots, v_n$ die Koordinatenmatrix A, so hat h^* bezügl. $w_1, \dots, w_n$ die Matrix

$$B^{-1} A^t B.$$

Bew: $\beta(L x, y) = \beta(x, L^* y) \quad \forall x, y$
ist äqu zu
$$\beta_2 \circ L^* = L^t \circ \beta_2 \qquad (L^t : V^* \to V^*,$$

Schreibe [illegible]

β ist n.a. $\Rightarrow$ β_2 ist Isom.
$\dim V = \dim W$
$$\Rightarrow \qquad L^* = \beta_2^{-1} \circ L^t \circ \beta_2$$

Die Koordinatenmatrix von β_2 ist $\mathcal{B}$, die von L^t ist A^t. $\Rightarrow$ Bel. $\square$

Def: Sei $\beta : V \times V \to K$ Bilinearform. Eine lin Abb $s : V \to V$ heißt <u>Isometrie</u>, falls
$$\beta(sx, sy) = \beta(x, y) \quad \forall x, y \in V.$$

Thm: Sei V ein K-VR der Dim. n und $\beta : V \times V \to K$ eine n.a. Bil.-Form. Für einen End. $s : V \to V$ sind äqu:

i) s ist Isometrie (bzgl β).
ii) Es gilt $s^* s = \mathrm{id}$
iii) s ist invertierbar und $s^{-1} = s^* = \mathfrak{s}$
iv) Ist $b_1, \ldots, b_n$ Basis von V, $\mathcal{B}$ die Strukturmatrix von β und S die Matrix von s bzgl der Basis, so gilt
$$\mathcal{B} = S^t \mathcal{B} S$$

Bew: Übung.

Def: Sei $\beta: V \times W \to K$ Bilinearform. $x \in V$, $y \in W$ heißen orthogonal zueinander (bezügl. β), falls $\beta(x,y) = 0$.

Sind $X \subset V$, $Y \subset W$ Teilmengen, so def. man
$$X^\perp = \{y \in W;\ \beta(x,y) = 0\ \forall\, x \in X\}$$
$$^\perp Y = \{x \in V;\ \beta(x,y) = 0\ \forall\, y \in Y\}$$

„orthogonales Komplement".

Bem: i) $X^\perp \subset W$ Unter-VR.
$^\perp Y \subset V$ Unter-VR.

ii) $X^\perp = (\mathrm{Lin}\, X)^\perp$,
$^\perp Y = {}^\perp(\mathrm{Lin}\, Y)$.

iii) $^\perp W = \mathrm{Kern}\, \beta_1$
$V^\perp = \mathrm{Kern}\, \beta_2$.

Satz (Dimensionsformel für orth. Komplemente)
Seien V, W endl. dim. VR und $\beta: V \times W \to K$ eine Bil.-Form.
Für jeden Teilraum $X \subset V$ gilt
$$\dim X + \dim X^\perp = \dim W + \dim(^\perp W \cap X).$$
Für jeden Teilraum $Y \subset W$ gilt

$$\dim Y + \dim {}^{\perp}Y = \dim V + \dim(V^{\perp} \cap Y)$$

<u>Bew:</u> Betr. $\beta_1 : V \to W^*$

~~Dim-Formel für lin.~~ Abb liefert

~~wegen~~

und die Einschränkung

$$\beta_1|X : X \to W^*.$$

Wegen ${}^{\perp}W = \operatorname{Kern} \beta_1$ gilt

$${}^{\perp}W \cap X = \operatorname{Kern} \beta_1|X.$$

Dim Formel für lin Abb:

$\Rightarrow$

$$\dim(\beta_1 X) = \dim X - \dim({}^{\perp}W \cap X)$$

Andererseits gilt (§1, Lemma 5)

$$\dim(\beta_1 X) + \dim(\beta_1 X)^0 = \dim W$$

und $(\beta_1 X)^0 = X^{\perp}$.

$\Rightarrow$ $\dim(\beta_1 X) = \dim W - \dim X^{\perp}$

$\Rightarrow$ Beh. $\square$

<u>Kor:</u> $\dim V + \dim V^{\perp} = \dim W + \dim {}^{\perp}W$

<u>Bew:</u> Satz für $X = V$. $\square$

<u>Kor:</u> Falls $\dim V = \dim W$, so ist $\dim V^{\perp} = \dim {}^{\perp}W$, also β n.a. bezügl der ersten Var $\Leftrightarrow$ β n.a. " " zweiten Var.

<u>Kor</u>: Seien V, W endl. dim K-VR der gleichen Dim und $\beta: V\times W\to K$ n.a. Bil. Form. Dann ist für Teilräume $X\subset V$ und $Y\subset W$:

$$\dim X + \dim X^\perp = \dim V$$
$$\dim Y + \dim Y^\perp = \dim V.$$

Außerdem gilt ${}^\perp(X^\perp) = X$, $({}^\perp Y)^\perp = Y$.

<u>Schiefsymmetrische Bil-Formen</u>

<u>Def</u>: Eine Bilinearform $\beta: V\times V\to K$ heißt schiefsymmetrisch, falls
$$\beta(x,y) = -\beta(y,x) \quad \forall x,y\in V.$$

<u>Bem</u>: Sei $\operatorname{char}(K)\neq 2$ (d.h. $1+1\neq 0 \in K$). Dann sind äqu: für $\beta: V\times V\to K$:
i) β schiefsymmetrisch
ii) β symplektisch, d.h. $\beta(x,x)=0 \quad \forall x\in V$.

<u>Bew</u>: i $\Rightarrow$ ii)
$$\beta(x,x) = -\beta(x,x)$$
$$\Rightarrow 2\beta(x,x)=0$$
$$\Rightarrow \beta(x,x) = 0 \quad \forall x$$

ii) $\Rightarrow$ i)
$$0=\beta(x+y, x+y) = \beta(x,x)+\beta(x,y)+\beta(y,x)+\beta(y,y)$$
$$= 0 + \beta(x,y) + \beta(y,x) + 0$$
$$\Rightarrow \beta(x,y) = -\beta(y,x) \quad \forall x,y\in V. \quad \square$$

<u>Bsp</u>: Im-Teil eines hermiteschen Skalarprod.

Bem: Sei $\beta: V\times V \to K$ Bil-Form mit Strukturmatrix B (bzgl. einer Basis). β ist schiefsymmetrisch $\Leftrightarrow$ $B = -B^t$.

Bem: Sei $\beta: V\times V\to K$ schief-symmetrisch und n.a. Dann ist $\dim V$ gerade.

Bew: Übung

Satz: Sei $\beta: V\times V\to K$ eine n.a. symplektische Bilinearform. Dann ex. eine symplektische Basis, d.h. eine Basis $u_1, v_1, \dots, u_m, v_m$ von V bezügl. der die Strukturmatrix die Gestalt

$$B = \begin{pmatrix} H & & & 0 \\ & H & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & H \end{pmatrix} \in K^{2m\times 2m}$$

hat, wobei $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
Insbesondere ist $\dim V = 2m$ gerade und $\det B \in K$ ein Quadrat.

Bew: Sei $u_1 \neq 0$ bel. Vektor aus V.
β n.a. $\Rightarrow \exists\, v_1 \in V$ mit $\beta(u_1, v_1) = 1$.
Sei $V_0 = Ku_1 + Kv_1 \subset V$
und $W = V_0^\perp \subset V$.
Es ist $\dim V_0 = 2$ und $\beta|_{V_0}$ hat die Strukturmatrix H bezügl. der Basis u_1, v_1.

β n.a. $\Rightarrow \dim W = \dim V - \dim V_0$
$= n-2$

$\beta|_W : W \times W \to K$ ist n.a. sympl. Bil-Form.
$\Rightarrow$ Beh. folgt per Induktion nach $\dim V$.
$\det H = 1 \Rightarrow \det B = 1.$ $\square$

§3 Quadratische Formen (↔ symmetrische Bilinearformen)

K Körper

Bsp in Dimension 1: $c \in K$ fest.
$q : K \to K$, $x \mapsto q(x) = cx^2$.

Allgemeiner: in Dim n:
Seien $c_{ij} \in K$ gegeben, $i,j = 1, \dots, n$

Betr. $q : K^n \to K$, $x \mapsto q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j$.

Fragen: • Welche Werte nimmt q an?
• Klassifizierung (bis auf Isometrie)?
• Invarianten von q?

Antworten hängen stark von K ab.
„Schwer" für $K = \mathbb{Q}$
„Einfacher" für $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Def: Sei V ein K-VR. Eine quadratische Form auf V ist eine Abb $q: V \to K$, so daß

i) $q(ax) = a^2 q(x) \quad \forall\, a \in K,\ \forall\, x \in V$.

ii) Die Abb $V \times V \to K$,
$(x,y) \mapsto q(x+y) - q(x) - q(y)$
ist eine Bilinearform auf V.

Bem 1: Sei $\beta = \beta_q$ die Bil-Form zu q in ii).
Es ist $\beta(x,y) = q(x+y) - q(x) - q(y)$
$\Rightarrow \beta(x,x) = q(2x) - q(x) - q(x)$
$\Rightarrow \beta(x,x) = 2q(x)$

Ist char $K = 2$, so folgt $\beta(x,x) = 0\ \forall x$.
Ist char $K \neq 2$, so folgt $q(x) = \frac{1}{2}\beta(x,x)$.
$\Rightarrow$ q ist durch β eind. best. und (i) folgt aus (ii).

Im folgenden sei char $K \neq 2$.

Bem 2: i) β ist eine symmetrische Bilinearform.

ii) Die Zuordnung $q \mapsto \beta$ definiert eine Bijektion zwischen der Menge der q.F. auf V und der Menge der symm. Bil-Formen auf V.

Viele Begriffe aus der Theorie der Bilinear-formen übertragen sich auf q. F.

<u>Def</u>: • q heißt nicht ausgeartet, falls β n.a. ist.

• Ist $b_1, \dots, b_n$ eine Basis von V, so heißt

$$B = \begin{pmatrix} \beta(b_1,b_1) & \cdots & \beta(b_1,b_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \beta(b_n,b_1) & \cdots & \beta(b_n,b_n) \end{pmatrix}$$

<u>Strukturmatrix</u> von q bezüglich $b_1, \dots, b_n$.
Auch „Gram-Matrix". $(B = B^t)$

• Ist $X \subset V$ Teilmenge, so ist $X^\perp$ definiert.

<u>Bem 3</u>: Sei $q : V \to K$ q. F. mit Strukturmatrix B bezügl. einer Basis $b_1, \dots, b_n$.
q ist n.a. $\Longleftrightarrow$ B ist invertierbar.

<u>Bew</u>: q n.a. $\Longleftrightarrow V^\perp = \{0\}$

$x \in V^\perp \Longleftrightarrow \beta(x, b_i) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n.$

$x = \sum_{j=1}^n x_j b_j \in V^\perp \Longleftrightarrow \sum_j x_j \beta(b_j, b_i) = 0 \quad \forall i$

$\Longleftrightarrow B \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$

$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Kern}(B).$

$\Rightarrow$ Bel. ◻

Bem 4: Sei $q: V \to K$ q.F.
Sei $W \subset V$ Unter-VR, so daß
$V = V^{\perp} \oplus W$.
Dann ist $q|_W : W \to K$ eine n.a. q.F.

§4 Orthogonalbasen und der Wittsche Kürzungssatz

Def: Ein quadratischer Raum über K ist ein ~~K-VR V~~ Paar (V, q) bestehend aus einem K-VR V und einer q.F. $q: V \to K$.

Def: Zwei quadratische Räume (V, q), (V', q') über K heißen äquivalent, falls es einen isometrischen Isomorphismus $s: V \to V'$ gibt (d.h. einen K-VR Iso. mit $q'(sx) = q(x)$ $\forall x \in V$).
Schreibe $(V,q) \simeq (V',q')$.

Bem 1: Ist $s: (V,q) \to (V',q')$ Isometrie, so gilt für die zug. Bil-Formen
$$\beta'(sx, sy) = \beta(x,y).$$

Satz 2: Sei (V,q) ein quadr. Raum über K. Dann besitzt V eine Orthogonalbasis $v_1, \dots, v_n$, d.h. eine

Basis mit

$$\beta(b_i, b_j) = 0 \quad \forall i \neq j.$$

Setzt man $a_i = \beta(b_i, b_i)$, so gilt

$$q\left(\sum_{i=1}^n x_i b_i\right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i x_i^2 .$$

<u>Bew</u>: Ind nach $\dim V = n$.

<u>$n=1$</u>: ✓

<u>$n>1$</u>: Ist $q(v) = 0 \ \forall v \in V$, so ist jede Basis Orthogonal-Basis $\Rightarrow$ fertig.

<u>Ang</u> $\exists\, b \in V$ mit $q(b) \neq 0$.

Sei $W = b^\perp = \{ w \in V ;\ \beta(v,w) = 0 \}$.

Dimensionsformel für orth Komplemente liefert

$$\underbrace{\dim (Kb)}_{=1} + \dim W = \underbrace{\dim V}_{=n} + \dim (\underbrace{V^\perp \cap Kb}_{= \{0\} \text{ wegen } q(b) \neq 0})$$

$\Rightarrow \dim W = n-1$.

[W ist Kern der lin Abb $V \to K$, $x \mapsto \beta(b,x)$]

$(W, q|_W)$ ist quadr Raum der Dim $n-1$.

$\underset{\Rightarrow}{\text{IndAnn}}$ W hat OB $b_2, \dots, b_n$.

$\Rightarrow$ $b, b_2, \dots, b_n$ ist OB von V. $\square$

<u>Bem 3</u>: Bezügl eines OB hat die

Strukturmatrix Diagonalgestalt

$$B = \begin{pmatrix} \beta(b_1,b_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta(b_n,b_n) \end{pmatrix}.$$

<u>Def</u>: Ist $A \in K^{n\times n}$ symm. Matrix, so schreiben wir $q_A : K^n \to K$ für die q.F.

$$x \mapsto q_A(x) = \frac{1}{2} x^t A x.$$

Sind $a_1, \dots, a_n \in K$, so schreiben wir $[a_1, \dots, a_n]$ für die q.F zu

$$A = 2\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix},$$

<u>also</u> $q(x) = a_1x_1^2 + \dots + a_nx_n^2$.

Solche Formen heißen Diagonalformen.

<u>Bem 4</u>: Ist (V,q) q.R. und A die darst. Matrix bezügl. einer Basis $b_1, \dots, b_n$, so ist

$$s : (V,q) \longrightarrow (K^n, q_A), \quad b_i \mapsto e_i$$

eine isometrische Isomorphie (Äquivalenz von q.R.).

Satz 2 besagt, daß jede q.F. zu einer Diagonalform äquivalent ist.

<u>Achtung</u>: Die in der Diagonalform $[a_1, \dots, a_n]$ auftretenden Koeff. sind durch q <u>nicht</u> eind. best.