III Linear und Bilinearformen

§1 Linearformen

V K-VR.

<u>Def</u>: Eine lineare Abb $f: V \to K$ heißt <u>Linearform</u>.

Die Menge $V^* = \mathrm{Hom}(V,K)$ aller Linearformen auf V heißt <u>Dualraum</u> von V.

V^* ist K-VR

<u>Bem 1</u>: $\dim V^* = \dim V$

Sei $B = (b_1, \dots, b_n)$ Basis von V, und als Basis des K-VR K nehme 1. Zu $f: V \to K$ betr. Koord.-Matrix
$$a = M_1^B(f) = (a_1, \dots, a_n) \in K^{1\times n}$$
wobei
$$a_j = f(b_j).$$

Sei $E = (e_1, \dots, e_n)$ die Standardbasis von K^n und $\sigma_B : K^n \to V$ die lin Abb mit
$$e_i \mapsto b_i.$$

Dann haben wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} b_i: & V & \xrightarrow{f} & K \\ \hat{\updownarrow} & \sigma_B \uparrow & & \uparrow \mathrm{id}_K \\ e_i: & K^n & \xrightarrow[x \mapsto a \cdot x]{} & K \end{array}$$

Erhalten Isomorphismus

$$\begin{aligned} \alpha_B : V^* &\longrightarrow K^{1\times n} \\ f &\longmapsto M_1^B(f) \end{aligned}$$

<u>Bem</u>: Für $V = K^n = K^{n\times 1}$ und $B = E$ ist $\alpha_E : (K^n)^* \longrightarrow K^{1\times n}$ gegeben durch $x \longmapsto x^t$.

<u>Def.</u> Die zur Basis B von V <u>duale Basis</u> $B^* = (b_1^*, \dots, b_n^*)$ besteht aus den eindeutig bestimmten Linearformen b_i^* für die gilt:

$$b_i^*(b_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$(i,j = 1, \dots, n)$.

Es gilt also

$$\alpha_B(b_i^*) = e_i^t .$$

<u>Def</u> (Dual einer lin. Abb)
Sei $h : V \to W$ lin Abb.
Die zu h duale (transponierte) Abb ist def durch

$$h^* : W^* \to V^*, \quad h^*(f) = f \circ h .$$

Bem 2: Sind $h_1 : V \to W$, $h_2 : W \to X$ lin Abb, so gilt
$$(h_2 \circ h_1)^* = h_1^* \circ h_2^*$$

Ist $h : V \to W$ Isom., so auch $h^* : W^* \to V^*$ und $(h^*)^{-1} = (h^{-1})^*$.

Bew: Übung.

Lemma 3: Sei $f : V \to W$ lin Abb und $B = (b_1, \dots, b_n)$ Basis von V, $C = (c_1, \dots, c_m)$ Basis von W. Sei $f^* : W^* \to V^*$ die duale Abb und C^*, B^* die dualen Basen. Ist
$$A = M_C^B(f), \qquad \left[f(b_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot c_i\right]$$
so gilt
$$A^t = M_{B^*}^{C^*}(f^*). \qquad \left[f^*(c_i^*) = \sum_{j=1}^n \underbrace{a_{ij}}_{(A^t)_{ji}} \cdot b_j^*\right]$$

Bew: Übung

Kor:
$$(AB)^t = B^t A^t$$
$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t \quad \text{(falls } A \text{ invertierbar)}$$

Definiere ein „Produkt"
$$V^* \times V \to K,$$
$$(f, x) \mapsto f(x).$$

Dies ist bilinear, d.h.

$\langle f_1+f_2, x\rangle = \langle f_1, x\rangle + \langle f_2, x\rangle$
$\langle f, x_1+x_2\rangle = \langle f, x_1\rangle + \langle f, x_2\rangle$
$\langle af, x\rangle = a\langle f, x\rangle = \langle f, ax\rangle$

für $f, f_1, f_2 \in V^*$, $x, x_1, x_2 \in V$, $a \in K$.

- Ist $L: V \to W$ linear und $f \in W^*$, so ist $L^*(f) \in V^*$ und

$$\langle L^*(f), x\rangle = \langle f, L(x)\rangle .$$

<u>Def</u>: Sind $f \in V^*$, $x \in V$ mit $\langle f, x\rangle = 0$, so heißt f <u>orthogonal</u> zu x. „$f \perp x$"

Ist $M \subset V$ Teilmenge, so sei

$$M^\circ = \{ f \in V^* \mid \langle f, x\rangle = 0 \ \forall x \in M\}$$
$\subset V^*$ Unter-VR.
„orthogonales Komplement von M".

Ist $F \subset V^*$ Teilmenge, so sei

$$F^\circ = \{ x \in V \mid \langle f, x\rangle = 0 \ \forall f \in F\}$$
$\subset V$ Unter-VR

<u>Bem 4</u>: Es gilt

i) $M_1 \subset M_2 \subset V \Rightarrow M_2^\circ \subset M_1^\circ$
ii) $M^\circ = (\mathrm{Lin}(M))^\circ$
iii) $M \subset M^{\circ\circ}$
iv) $M^\circ \subset M^{\circ\circ\circ}$

Analog für $F_1 \subset F_2 \subset V^*$.

Für Teilräume $M_1, M_2 \subset V$ bzw $F_1, F_2 \subset V^*$ gilt

$$(M_1 + M_2)^\circ = M_1^\circ \cap M_2^\circ$$
$$M_1^\circ + M_2^\circ = (M_1 \cap M_2)^\circ$$

<u>Lemma 5</u>: Sei V endl.-dim. K-VR und $M \subset V$ Teilmenge. Es gilt

$$\dim(M^\circ) = \dim(V) - \dim(\operatorname{Lin} M)$$

<u>Bew</u>: Sei $U = \operatorname{Lin}(M)$. Wegen $U^\circ = M^\circ$

<u>z.z.</u>: $\dim U^\circ = \dim V - \dim(U)$.

Sei $m = \dim(U)$, $n = \dim(V)$.

Sei $(b_1, \dots, b_m)$ Basis von U.

Setze zu Basis $(b_1, \dots, b_m, b_{m+1}, \dots, b_n)$ von V fort.

Betr. duale Basis $(b_1^*, \dots, b_n^*)$ von V^*.

<u>Beh</u>: $b_{m+1}^*, \dots, b_n^*$ bilden Basis von U°.

Sei $f = \sum_{i=1}^n x_i b_i^* \in V^*$ bel.

$f \in U^\circ \iff \langle f, b_j \rangle = 0 \quad \forall j = 1, \dots, m$

$\iff x_j = 0 \quad$ "

$\Rightarrow$ Beh. $\square$

$V^{**} = (V^*)^*$ heißt Bidualraum von V.

Haben eine Abb

$$V \to V^{**}, \quad x \mapsto \hat{x}$$

mit $\underset{\substack{\cap \\ V^*}}{\hat{x}(f)} = f(x) = \langle f, x \rangle$.

Bem 6: $x \mapsto \hat{x}$ ist inj.

Bew: ZZ: $x \neq 0 \Rightarrow \hat{x} \neq 0$.

Sei $x \neq 0$ beliebig.

Ergänze zu Basis $B = (x = b_1, b_2, \dots, b_n)$ von V.

$\Rightarrow f = b_1^* \in V^*$ hat die Eigenschaft

$$f(x) = \langle f, x \rangle = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow \hat{x} \neq 0$. $\square$

Folg: Ist $\dim V < \infty$, so ist

$V \to V^{**}$, $x \mapsto \hat{x}$ ein kanonischer Isomorphismus.

Satz 7 (Dualitätssatz)

Sei V endl.-dim K-VR. Dann ist

$$V^* \times V \to K, \quad (f, x) \mapsto \langle f, x \rangle = f(x)$$

nicht ausgeartet, d.h.

$$\langle f, x \rangle = 0 \quad \forall x \in V \Rightarrow f = 0,$$
$$\langle f, x \rangle = 0 \quad \forall f \in V^* \Rightarrow x = 0.$$

Für $M \subset V$ Teilraum gilt

$$\dim M^\circ = \dim V - \dim M.$$

§2 Bilinearformen

<u>Def</u>: Seien V, W K-Vektorräume. Eine Abb.
$$\beta: V \times W \to K$$
heißt eine <u>Bilinearform</u>, falls β linear in beiden Variablen ist, d.h.,
$$\beta(x+x', y) = \beta(x,y) + \beta(x', y)$$
$$\beta(x, y+y') = \beta(x,y) + \beta(x, y')$$
$$\beta(ax, y) = a\beta(x,y) = \beta(x, ay).$$

Die Bilinearform heißt <u>nicht-ausgeartet</u> in der ersten Variablen bzw der zweiten Variablen, falls gilt
$$\beta(x,y) = 0 \ \forall y \Rightarrow x = 0$$
bzw
$$\beta(x,y) = 0 \ \forall x \Rightarrow y = 0.$$

Mit $Bi(V,W) = Bil_K(V,W)$ bezeichnen wir die Menge aller Bilinearformen $\beta: V \times W \to K$.
$Bil_K(V,W)$ ist offenbar ein K-VR.

<u>Bspe</u> (1) $\mu: K \times K \to K$
$(x,y) \mapsto x \cdot y$
Multiplikation eines Körpers ist eine Bilinearform

(2) Sei $B = (b_{ij}) \in K^{n \times m}$
$\beta: K^n \times K^n \to K$
$(x,y) \mapsto x^t B y$ ist eine Bilinearform
Für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ ist
$$\beta(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i y_j \quad \text{dia}$$
Man nennt β die von B vermittelte Bilinearform.

(3) Ist $V = W$, so heißt $\beta: V \times V \to K$ "eine Bilinearform auf V"

(4) aus der Analysis:
Sei $f: G \to \mathbb{R}^n$ eine auf einer offenen Teilmenge $G \subseteq \mathbb{R}^n$ definierte (total) differenzierbare Funktion.
Für jedes $a \in G$ ist dann $f'(a)$ eine Linearform auf $\mathbb{R}^n$.
Ist $f': G \to (\mathbb{R}^n)^*$ wieder (total) differenzierbar, so kann man $f''(a)$ für alle $a \in G$ als Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$ sehen.

(5) $V^* \times V \to K$

$(f, x) \mapsto \langle f, x \rangle = f(x)$ ist eine Bilinearform.

<u>Bem.</u> Seien V und W endlichdimensionale K-VR mit
$$\dim V = \dim W.$$
Dann ist eine Bilinearform $\beta: V \times W \to K$ genau dann nicht ausgeartet in der ersten Variablen, wenn sie nicht ausgeartet in der zweiten Variablen ist.

<u>Bew.</u>: Übung

Sei $\beta: V \times W \to K$ eine Bilinearform. Zu einem festen $x \in V$ betrachten wir die Abbildung
$$\beta_1(x): W \to K$$
$$y \mapsto \beta(x, y).$$
Dann ist $\beta_1(x)$ linear und $\beta_1 x$ ist eine Linearform für jedes $x \in V$.
Also ist $\beta_1: V \to W^*$
eine lineare Abbildung von V in den Dualraum W^* von W.

Es gilt

$$\beta_1(x)(y) = \beta(x,y) = \langle \beta_1(x), y \rangle \quad \forall\, x \in V,\ y \in W.$$

<u>Satz 1</u> Die Abb.

$$\mathrm{Bil}(V,W) \to \mathrm{Hom}(V,W^*)$$
$$\beta \mapsto \beta_1$$

ist ein Isomorphismus von VR.

Weiter gilt: a) Ist $\dim V = n$, $\dim W = m$, dann ist $\dim(\mathrm{Bil}(V,W)) = mn$.

b) β ist nicht ausgeartet in der ersten Variablen, falls β_1 injektiv ist.

<u>Bew.</u> Zu $h \in \mathrm{Hom}(V,W^*)$ definieren wir eine Bilinearform

$$\beta : V \times W \to K \quad \text{durch}$$
$$\beta(x,y) = \langle h(x), y \rangle, \quad x \in V,\ y \in W.$$

Dann ist offensichtlich $h = \beta_1$, d.h. $h \mapsto \beta$ ist die Umkehrabb. zu $\beta \mapsto \beta_1$.

a) und b) sind klar.

<u>Bem.</u> 1) Die Abbildung $\beta \mapsto \beta_1$ ist ein basisunabhängiger Isomorphismus von Vektorräumen. Deswegen können wir Bilinearformen $V \times W \to K$ mit den entsprechenden linearen Abbildungen $V \to W^*$ identifizieren:

$$\mathrm{Bil}(V,W) = \mathrm{Hom}(V,W^*)$$

2) Völlig analog kann man eine Abb.

$$\beta_2 : W \to V^*$$

durch $(\beta_2(y))(x) = \beta(x,y)$ definieren ($x \in V$, $y \in W$)

Def. Seien V und W endlichdimensionale K-VR.
Es sei $\dim V = n$ und $\dim W = m$.
Sei $\beta: V \times W \to K$ eine Bilinearform und sei $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V, $(w_1, \dots, w_m)$ eine Basis von W.
Dann heißt die $n \times m$-Matrix

$$B = (b_{ik}) \text{ mit } b_{ik} = \beta(v_i, w_k)$$

die <u>Matrix der Bilinearform β</u> in Bezug auf die Basen $(v_1, \dots, v_n)$ von V, $(w_1, \dots, w_m)$ von W.

Satz 2 Ist B die Matrix der Bilinearform $\beta: V \times W \to K$ bzgl der Basen $(v_1, \dots, v_n)$ von V, $(w_1, \dots, w_m)$ von W, dann ist

$$B^t$$

die Koordinatenmatrix der linearen Abb.

$$\beta_1: V \to W^*$$

bzgl der Basen $(v_1, \dots, v_n)$ von V, $(w_1^*, \dots, w_m^*)$ von W^*.

Bew. Für $1 \le i \le n$, $1 \le k \le m$ gilt nach Def.

$$(\beta_1(v_i))(w_k) = b_{ik}$$

Deshalb gilt

$$\beta_1(v_i) = \sum_j b_{ij} w_j^* \qquad (\text{wg } w_j^*(w_k) = \delta_{jk}$$

Bem. Analog zeigt man, dass B die Koordinatenmatrix der linearen Abb

$$\beta_2: W \to V^*$$

ist.

<u>Bem:</u> Sei die Notation wie eben.

1) Es gilt $\beta(x,y) = x^t B y \quad \forall x \in V, y \in W$.
(folgt direkt aus der Bilinearität von β)

2) β ist durch B festgelegt.
B heißt auch Strukturmatrix oder Gram-Matrix.

3) Die Abbildung $\beta \mapsto B$ ist ein Isomorphismus
$$\mathrm{Bil}_K(V,W) \to K^{n \times m}.$$

<u>Satz 3</u> Sei B die Matrix der Bilinearform $\beta: V \times W \to K$ bzgl der Basen $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V, $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$ von W. Seien $\mathcal{B}'$ und $\mathcal{C}'$ weitere Basen von V bzw W mit zugeh. Strukturmatrix B'. Dann gilt
$$B' = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}} \, B \, M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}'}$$

<u>Bew.</u> Übung.

<u>Lemma</u> Sei V n-dim K-VR. $\beta: V \times V \to K$ Bilinearform. Seien B, C Strukturmatrizen bzgl. beliebiger Basen von V, dann gilt
$$\det C = a^2 \det B \quad \text{für ein } a \in K^\times.$$

<u>Bew:</u> Folgt aus Satz 3.