Bestimmung der Jordanschen Normalform eines End. $f: V \to V$

1. Berechne Minimalpolynom $P_f(x)$ und Faktorisierung in Linearfaktoren $P_f(x) = (x-\lambda_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (x-\lambda_k)^{n_k}$

2. Bestimme die Haupträume $\mathrm{Hau}(f, \lambda_i) = \mathrm{Ker}((f - \lambda_i\, id)^{n_i})$

3. Genügt die einzelnen Haupträume zu betr.
$\Rightarrow$ OBdA hat f nur einen Eigenwert λ und $P_f(x) = (x-\lambda)^n$

4. Genügt $f - \lambda\, id$ zu betr.
$\Rightarrow$ OBdA f nilpotent und $P_f(x) = x^n$

$\Rightarrow$ Ex Basis B von V so daß

$$A = M_B^B(f) = \begin{pmatrix} J(d_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J(d_m) \end{pmatrix} \in K^{n \times n}$$

$$J(d) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \in K^{d \times d}$$

Es ist m = Anz der Jordanblöcke

$\mathrm{Rang}\, A = n - m$

Haben $\mathrm{Rang}\, J(d)^k = \begin{cases} d-k, & k \le d \\ 0, & k > d \end{cases}$

Sei $B_d = \#\{i \,;\, d_i = d\}$ = Anz der J-Blöcke vom Format $d \times d$

Es folgt

$$\text{Rang}\, A^k = \text{Rang}\, f^k = \sum_{i=1}^{m} \text{Rang}\,(J(\alpha_i)^k)$$

$$= \sum_{\alpha > k} \beta_\alpha (\alpha - k) .$$

Damit kann man die β_α rekursiv berechnen.

i) Ang. $A^k = 0$.

$$\Rightarrow 0 = \text{Rang}\, A^k = \sum_{\alpha > k} \underbrace{\beta_\alpha}_{\geq 0} \underbrace{(\alpha - k)}_{> 0}$$

$$\Rightarrow \beta_\alpha = 0 \quad \forall \alpha > k$$

ii) $\text{Rang}\, A^{k-1} = \sum_{\alpha > k-1} \beta_\alpha (\alpha - k + 1)$

nur $\alpha = k$ Term $\neq 0$

$$= \beta_k$$

iii) $\text{Rang}\, A^{k-2} = \sum_{\alpha > k-2} \beta_\alpha (\alpha - k + 2)$

$$= \beta_k \cdot 2 + \beta_{k-1}$$

$$\Rightarrow \beta_{k-1} = \text{Rang}\, A^{k-2} - 2 \beta_k$$

...

Allgemein: $\beta_k = \text{Rang}\, f^{k-1} - 2\beta_{k+1} - 3\beta_{k+2} - \dots$

Bestimmung einer Jordan-Basis: (51)

OBdA $f: V \to V$ nilpotent, $P_f(x) = x^n$.

Es sei $d \in \mathbb{N}$ mit
$f^d = 0 \neq f^{d-1}$.

$\Rightarrow$ Es gibt 0 J-Blöcke der Länge $> d$
" " $\beta_d = \operatorname{Rang} f^{d-1}$ " " " d.

Seien $v_1, \dots, v_{\beta_d}$ l.u., so daß
$$V = (Kv_1 \oplus \dots \oplus Kv_{\beta_d}) \oplus \operatorname{Kern}(f^{d-1})$$

Setze $M_d = \{v_1, \dots, v_{\beta_d}\}$ (l.u.)

$$B_d = M_d \cup f(M_d) \cup \dots \cup f^{d-1}(M_d).$$

$\Rightarrow B_d$ ist l.u. und f-invariant [illegible]

$\Rightarrow V_d := \operatorname{Lin}(B_d)$ ist f-invariant

und $f|_{V_d}$ hat bezügl. der Basis

$v_1, f(v_1), \dots, f^{d-1}(v_1), v_2, f(v_2), \dots, f^{d-1}(v_2), \dots, f^{d-1}(v_{\beta_d})$

von V_d die darst. Matrix

$$\begin{pmatrix} J(d) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J(d) \end{pmatrix}^t \quad \beta_d \text{ Blöcke}.$$

Bestimme nun ein Komplement zu
$V_d + \operatorname{Kern}(f^{d-2})$ in $\operatorname{Kern}(f^{d-1})$
Die Dimension ist gerade β_{d-1}
Sei M_{d-1} eine Basis.

Setze $\mathcal{B}_{d-1} := \mathcal{V}_{d-1} \cup f(\mathcal{V}_{d-1}) \cup \ldots \cup f^{d-2}(\mathcal{V}_{d-1})$

Ist l.u. und f-invar.

$\Rightarrow V_{d-1} = \operatorname{Lin} \mathcal{B}_{d-1}$ ist f-invar.

Nach Umnummerierung von $\mathcal{B}_{d-1}$ hat die darst. Matrix von $f|_{V_{d-1}}: V_{d-1} \to V_{d-1}$ die Gestalt

$$\begin{pmatrix} J^{(d-1)} & & \\ & \ddots & \\ & & J^{(d-1)} \end{pmatrix}^t \qquad p_{d-1} \text{ Blöcke}$$

⋮

Usw. Durch Zusammenfügen von $\mathcal{B}_d, \mathcal{B}_{d-1}, \ldots, \mathcal{B}_1$ erhält man eine Jordan-Basis.

<u>Ein explizites Beispiel</u>

Betr. $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Es ist $P_A(x) = \det(X \cdot E - A)$

$$= (X-3)^2 X + 4 + 6 + 2(X-3) + 4(X-3) - 3X$$
$$= (X-2)^3.$$

$\Rightarrow$ Ein Eigenwert, nämlich 2.

$\Rightarrow$ Ein Hauptraum, : K^3

$$B := A - 2E = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ist nilpotent.
In der Tat:

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = 0$$

Es ist rang $B = 2$, rang $B^2 = 1$,
rang $B^3 = 0$.

$\Rightarrow$ $\beta_\alpha = 0 \quad \forall \alpha > 3$

$\beta_3 = \text{Rang } B^2 = 1$

($\Rightarrow$ 1 Jordan-Block der Länge 3)

$\Rightarrow$ Jordan-Normalform von B $= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

von $A = B + 2E$ $\quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Kontrolle:

$\beta_2 = \text{Rang } B - 2\beta_3 = 2 - 2 \cdot 1 = 0$

$\beta_1 = \text{Rang } B^0 - 2\beta_2 - 3\beta_3 = 3 - 0 - 3 = 0$ ✓

Bestimmung einer Jordan-Basis:
($\alpha = 3$) $\quad B^3 = 0 \neq B^2$.

$$\text{Kern}(B^2) = \text{Kern}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \text{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Durch $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ wird $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ zur Basis von $V = K^3$ ergänzt.

Setze $\mathcal{B} = (B^2 v_1, B v_1, v_1) = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Es gilt

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$