so daß die darstellende Matrix $M_B^B(f)$ die Form

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

hat.

<u>Bew</u>: Sei $a \in V$ ein zyklischer Vektor.
Es ist $P_f(x) = x^n$, $n = \dim V$ (Kor 2)
$\Rightarrow f^n = 0$
$\Rightarrow f^r(a) = 0 \quad \forall r \geq n$
$\Rightarrow f^{n-1}(a), f^{n-2}(a), \dots, f(a), a$
ist Erz-System für V
$\Rightarrow$ l.u. und damit Basis für V.
Bezüglich dieser Basis ist die darst. Matrix wie gefordert. $\square$

<u>Satz 4</u>:
Sei $f: V \to V$ nilpotenter End und sei $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_m$ eine Zerlegung von V in f-invar zyklische Unterräume, so daß $\dim V_1 \geq \dim V_2 \geq \dots \geq \dim V_m$.
Dann sind m und das m-Tupel $(\dim V_1, \dots, \dim V_m)$ eind. durch f bestimmt.

Bew: Für den Beweis bezeichnen wir für $a \in V$ die Größe

$$h(a) = \dim V(a) \in \mathbb{N}_0$$ wegen Bem 3

als die Höhe von a. Es ist $h(a) = \min\{r \in \mathbb{N}_0 ; f^r(a) = 0\}$

Ist $a = a_1 + \ldots + a_m$ mit $a_i \in V_i$, so gilt

$$h(a_i) \leq h(a) \quad \forall i$$

und es ex i mit $h(a_i) = h(a)$.

Sei $a \in V$ mit $V(a) = V_1$.
Wegen $\dim V_1 \geq \dim V_i$ $\forall i$ ist dann a ein Element maximaler Höhe in V.

Sei $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_k$ eine zweite Zerlegung in f-invar zyklische Unterräume mit $\dim W_1 \geq \dim W_2 \geq \ldots$
Wir schreiben

$$a = w_1 + \ldots + w_k \quad \text{mit } w_i \in W_i$$

Es ex i mit $h(w_i) = h(a)$.
~~Dann ist $\dim W_i = \dim V_1 = h(a)$~~
Weil a max Höhe hat gilt dann

$$h(a) = h(w_i) \leq \dim W_i \leq \dim W_{i-1} \leq \ldots \leq \dim W_1 \leq h(a)$$

$\Rightarrow \dim W_i = \dim W_{i-1} = \ldots = \dim W_1 = h(a)$
$\Rightarrow$ OBdA $i = 1$, $h(w_1) = h(a)$, $\underline{\dim W_1} = \dim V_1$

Es gilt $w_1 = a - w_2 - w_3 - \ldots - w_k \in V_1 + (W_2 \oplus \ldots \oplus W_k)$

$\Rightarrow f^r(w_1) \in V_1 + (W_2 \oplus \dots \oplus W_k) \quad \forall r \in \mathbb{N}_0$

$\Rightarrow W_1 \subset V_1 + (W_2 \oplus \dots \oplus W_k)$

$\Rightarrow V = V_1 + (W_2 \oplus \dots \oplus W_k)$

Aus Dimensionsgründen ist die Summe direkt, also

(*) $\quad V_1 \cap (W_2 \oplus \dots \oplus W_k) = \{0\}$.

Es sei $p : V \to V_2 \oplus \dots \oplus V_m$ die Projektion auf den 2. Summanden in der Zerlegung

$$V = V_1 \oplus (V_2 \oplus \dots \oplus V_m).$$

Es sei $\sigma = p|_{W_2 \oplus \dots \oplus W_k}$

σ ist lin Abb

$$\sigma : W_2 \oplus \dots \oplus W_k \longrightarrow V_2 \oplus \dots \oplus V_m$$

Wegen (*) ist $\mathrm{Kern}(\sigma) = \{0\}$, also σ inj.

Aus Dimensionsgründen ist σ damit auch surj, also Isom.

Wir erhalten die zwei Zerlegungen

$$V_2 \oplus \dots \oplus V_m = \sigma(W_2) \oplus \dots \oplus \sigma(W_k)$$

in $f|_{V_2 \oplus \dots \oplus V_m}$-invariante zyklische Unterräume.

Per Induktion nach $\dim V$ folgt $k = m$ und $\dim V_2 = \dim W_2, \dots, \dim V_m = \dim W_m$. □

§5 Die Jordansche Normalform

<u>Erinnerung</u>:
Eine $r \times r$ Matrix J heißt Jordanblock zum Eigenwert $\lambda \in K$, falls sie von der Form ist

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

<u>Bsp</u>:

$r = 1 \quad (\lambda)$

$r = 2 \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

$r = 3 \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

<u>Def</u>: Eine Matrix aus $K^{n \times n}$ ist in Jordanscher Normalform, falls sie eine Block-Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_m \end{pmatrix}$$

ist, wobei die J_i Jordanblöcke sind (möglicherweise unterschiedlicher Größe).

<u>Satz 1</u> (Jordansche Normalform)
Sei $f: V \to V$ Endomorphismus.

Wenn $P_f \in K[x]$ vollständig in Linearfaktoren zerfällt, so gibt es eine Basis $\mathcal{B}$ von V, so daß

$$A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$$

in Jordanscher Normalform ist. Die Matrix A ist (bis auf die Reihenfolge der Jordanblöcke) eindeutig durch f bestimmt.

Bew:

Existenz:

Nach §2 Satz 11 können wir V zunächst in die Haupträume von f zerlegen:

$$V = \mathrm{Hau}(f,\lambda_1) \oplus \dots \oplus \mathrm{Hau}(f,\lambda_k)$$

Es genügt daher, die einzelnen Haupträume zu betrachten.

$\Rightarrow$ OBdA hat f nur einen Eigenwert λ. (und $f-\lambda\mathrm{id}$ ist nilpotent)

Es genügt, $f-\lambda\mathrm{id}$ zu betrachten.

$\Rightarrow$ OBdA f nilpotent.

§4 Satz 1 $\Rightarrow$ V hat Zerlegung in f-invar zyklische Teilräume,

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_m$$

$\Rightarrow$ OBdA f nilpotent und (V,f) zyklisch!

Hieraus folgt die Beh. aus Satz 3 in §4

Eindeutigkeit:

Es sei eine Basis $\mathcal{B}$ gegeben, so daß $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ Jordansche Normalform hat.

Faßt man alle Jordanblöcke zu einem festen Eigenwert λ zusammen, so erhält man die Einschränkung von f auf den zugehörigen Hauptraum $\mathrm{Hau}(f,\lambda)$.

Folglich setzt sich $\mathcal{B}$ aus Basen der verschiedenen Haupträume zusammen

=> OBdA hat f nur einen Eigenwert λ

=> Betr. wieder $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f-\lambda\,\mathrm{id}) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)-\lambda E$

=> OBdA f nilpotent.

=> Beh. folgt aus Satz 4 in §4. □

Kor 2:

Sei $A\in K^{n\times n}$ und $P_A(x)\in K[x]$ zerfalle in Linearfaktoren.

Dann ex. $B\in GL(n,K)$, so daß

$$BAB^{-1}$$

in Jordanscher Normalform ist.

Die Normalformmatrix ist bis auf Reihenfolge der Jordanblöcke eindeutig bestimmt.