Dann kann man f auf W einschränken und erhält eine Abb

$$f|_W : W \to W$$

Vor §1 Satz 2

Bem 6:
Sei W ein invar. Unter-VR von V, und $g = f|_W : W \to W$.
Dann ist P_g ein Teiler von P_f in $K[x]$.

Bew: Übung

Satz 7:
Sei $P \in K[x]$ ein Pol. mit $P(f) = 0$.
z.B. das char. Pol. von f.
Es sei $P = P_1 \cdot P_2 \in K[x]$ mit teilerfremden Faktoren $P_1, P_2 \in K[x]$.
Dann gilt

$$V = V_1 \oplus V_2$$

mit

$$V_i = \mathrm{Kern}(P_i(f)).$$

Die Räume V_i sind f-invariant.

Bew: Nach Satz 4 ex $A_1, A_2 \in K[x]$ mit

$$A_1 P_1 + A_2 P_2 = 1.$$

$$\Rightarrow \quad A_1(f) P_1(f) + A_2(f) P_2(f) = id_V$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{A_1(f) P_1(f) v}_{=: v_2} + \underbrace{A_2(f) P_2(f) v}_{=: v_1} = v \quad \forall v \in V$$

Nach Vor gilt $P_2(f)\overbrace{A_1(f)P_1(f)(v)}^{v_2} =$
$= \cancel{P(f)}A_1(f)P(f)v$
$= 0$

$\Rightarrow P_2(f)\; v_2 = 0$
$\Rightarrow v_2 \in \ker P_2(f)$

Genauso $P_1(f)\underbrace{A_2(f)P_2(f)v}_{v_1} = 0$

$\Rightarrow P_1(f)v_1 = 0$
$\Rightarrow v_1 \in \ker P_1(f)$

$\Rightarrow V = V_1 + V_2$

Noch z.z.: $V_1 \cap V_2 = \{0\}$

Für $v \in V_1 \cap V_2$ gilt
$v = A_1(f)\underbrace{P_1(f)v}_{=0} + A_2(f)\underbrace{P_2(f)v}_{=0} = 0.$ □

Bem 8 Sei $f: V \to V$ nilpotent, d.h. $f^m = 0$ für ein $m \in \mathbb{N}$.
Dann ist $P_f(x) = x^n$ mit $n = \dim V$.

Bew: $f^m = 0$
$\Rightarrow \det(f)^m = 0$
$\Rightarrow \det(f) = 0$
$\Rightarrow \exists\, 0 \neq v \in \operatorname{Kern}(f)$
$\Rightarrow v$ ist Eigenvektor von f mit Eigenwert 0.
Ergänze v zu Basis $B = (v, b_2, \ldots, b_n)$ von V. Darstellende Matrix ist

$$A = M_B^B(f) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & * \\ 0 & A' \end{array}\right)$$

$\Rightarrow P_f(x) = x \cdot P_{A'}(x)$.
A' ist auch nilpotent.
$\Rightarrow$ Beh per Induktion nach $\dim V$. $\square$

Sei $f: V \to V$ Endomorphismus des K-VR V, $n = \dim V < \infty$.

Def: Sei λ Eigenwert von f und $r \in \mathbb{N}$. Der r-te verallgemeinerte Eigenraum von f zum Eigenwert λ ist def als

$$\operatorname{Eig}_r(f, \lambda) = \operatorname{Kern}((f - \lambda \mathrm{id}_V)^r).$$

Bem 9: i) für $r = 1$ erhält man den ~~all~~ gewöhnlichen Eigenraum

$$\mathrm{Eig}_1(f,\lambda) = \mathrm{Eig}(f,\lambda)$$

ii) $\mathrm{Eig}_r(f,\lambda)$ ist f-invariant

iii) Es gilt

$$\mathrm{Eig}_1(f,\lambda) \subset \mathrm{Eig}_2(f,\lambda) \subset \mathrm{Eig}_3(f,\lambda) \subset \dots$$

iv) Da V endl. dim ex $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\mathrm{Eig}_N(f,\lambda) = \mathrm{Eig}_{N+1}(f,\lambda) = \mathrm{Eig}_{N+2}(f,\lambda) = \dots,$$

d.h. so daß die Inklusionskette stationär wird.
Dann heißt

$$\mathrm{Hau}(f,\lambda) := \mathrm{Eig}_N(f,\lambda) \quad \left(= \bigcup_{r=1}^{\infty} \mathrm{Eig}_r(f,\lambda)\right)$$

Hauptraum von f zum Eigenwert λ

(*) Satz 11:
Das char Pol P_f von f zerfalle in Linearfaktoren,

$$P_f(X) = (X-\lambda_1)^{m_1} \dots (X-\lambda_k)^{m_k}$$

($\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$).
Dann gilt

$$V = \mathrm{Eig}_{m_1}(f,\lambda_1) \oplus \dots \oplus \mathrm{Eig}_{m_k}(f,\lambda_k)$$

Durch Einschränken von f erhält man Endomorphismen

$$f_i : \mathrm{Eig}_{m_i}(f,\lambda_i) \longrightarrow \mathrm{Eig}_{m_i}(f,\lambda_i)$$

und es gilt

$$P_{f_i}(X) = (X-\lambda_i)^{m_i} \in K[X].$$

Bew: Induktion nach k.

$k=1$: Hier ist $P_f(X) = (X-\lambda_1)^{m_1} = (X-\lambda_1)^n$.

Nach dem Satz von Cayley-Hamilton gilt

$$P_f(f) = 0 \in \mathrm{End}(V)$$

$$\Rightarrow \quad (f-\lambda_1)^n \equiv 0$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Eig}_n(f,\lambda_1) = V \quad \checkmark$$

Sei nun $k>1$.

Wir faktorisieren

$P_f(X) = P_1(X)\cdot P_2(X)$ mit

$P_1(X) = (X-\lambda_1)^{m_1}$,

$P_2(X) = (X-\lambda_2)^{m_2}\cdots(X-\lambda_k)^{m_k}$.

Die Pol P_1 und P_2 sind teilerfremd und nach Satz 7 gilt

$$V = V_1 \oplus V_2 \quad \text{mit}$$

$$V_1 = \mathrm{Kern}\, P_1(f) = \mathrm{Kern}\,(f-\lambda_1 \mathrm{id})^{m_1} = \mathrm{Eig}_{m_1}(f,\lambda_1),$$

$$V_2 = \mathrm{Kern}\, P_2(f).$$

Sei $f_1 = f|_{V_1} : V_1 \to V_1$

~~Dann gilt $(f_1 - \lambda_1 \mathrm{id}_{V_1})^{m_1} \equiv 0$,~~

~~d.h. $(f_1 - \lambda_1 \mathrm{id})$ nilpotent.~~

Bem 8 $\Rightarrow$ $P_{f_1-\lambda_1 id_{V_1}}(X) = X^{\mu}$ mit $\mu = \dim V_1$

Es gilt $P_{f_1}(X) = \det(X id - f_1)$

$$= \det((X-\lambda_1) id - (f_1 - \lambda_1 id))$$
$$= P_{f-\lambda_1 id}(X-\lambda_1)$$

Bem 10 $\Rightarrow$ $P_{f_1}(X) = (X-\lambda_1)^{\mu}$, $\mu \in \mathbb{N}$

Da V_1, V_2 f-invariant sind und $V = V_1 \oplus V_2$ gilt $P_f(X) = P_{f_1}(X) \cdot P_{f|V_2}(X)$

$\Rightarrow \mu \leq m_1$ (folgt auch ~~zu~~ aus Bem. 10)

Beh: $\mu = m_1$.

Ang nicht, also $\mu < m_1$.

Dann gilt $X - \lambda_1 \mid P_{f|V_2}$

$\Rightarrow P_{f|V_2}(\lambda_1) = 0$

$\Rightarrow \exists\, 0 \neq v_2 \in V_2$ mit $f(v_2) = \lambda_1 v_2$

$\Rightarrow v_2 \in \ker(f - \lambda_1 id) \subset \ker(f - \lambda_1 id)^{m_1} \overset{\text{per def.}}{=} V_1$

$\Rightarrow 0 \neq v_2 \in V_2 \cap V_1$, ↯ zu $V = V_1 \oplus V_2$.

Also $P_{f_1}(X) = (X-\lambda_1)^{m_1} = P_1(X)$

und $P_{f|V_2}(X) = P_2(X)$.

Per Ind können wir annehmen, daß die Beh für V_2 bereits bewiesen ist $\Rightarrow$ Beh für f, V. □

(*) Bem 10: Sei λ Eigenwert von f mit alg. Vielfachheit m.

Dann gilt $\dim Eig(f,\lambda) \leq m$

31

ii) Die Einschränkung g von f auf $Eig_r(f,\lambda)$ hat das char Pol $P_g(x) = (x-\lambda)^\mu$ mit $\mu = \dim Eig_r(f,\lambda)$

Bew:

ii) Sei $W = Eig_r(f,\lambda)$, $g: W \to W$ Einschr. von f

Nach Def gilt

$$(g-\lambda id)^r = 0$$

$\Rightarrow$ $g - \lambda id \in End\, W$ ist nilpotent

$\overset{\text{Bem 8}}{\Rightarrow}$ ~~$P_g(x) =$~~

$$P_{g-\lambda id}(x) = x^\mu, \quad \mu = \dim W$$

$$\begin{aligned} P_g(x) &= \det(x\, id_W - g) \\ &= \det((x-\lambda) id - (g-\lambda id)) \\ &= P_{g-\lambda id}(x-\lambda) \\ &= (x-\lambda)^\mu. \end{aligned}$$

i) $Eig_r(f,\lambda) =: W$ ist f-invar.

$\overset{\text{Bem 6}}{\Rightarrow}$ $P_g(x)$ teilt $P_f(x)$

$\Rightarrow$ $\mu \leq m$. $\square$

Bem 12: P_f zerfalle in Linearfaktoren. Sei λ Eigenwert von f mit alg. Vielfachheit m. Dann gilt für alle $r \geq m$

$\dim \mathrm{Eig}(f,\lambda) = m$.

Insbesondere ist $\dim \mathrm{Hau}(f,\lambda) = m$.

Bew: Folgt aus Bem 10(i) $(\leq)$ und Satz 11 (...). $\square$

Satz 13:

Sei $f: V \to V$ Endom und $P_f \in K[x]$ zerfalle in Linearfaktoren. Es sind äqu:

i) f ist db

ii) Für alle Eigenwerte λ von f gilt $\mathrm{Eig}(f,\lambda) = \mathrm{Hau}(f,\lambda)$

Bew ii) $\Rightarrow$ i)

Satz 11 $\Rightarrow$ $V = \mathrm{Hau}(f,\lambda_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Hau}(f,\lambda_k)$

$\mathrm{Hau}(f,\lambda_i) = \mathrm{Eig}(f,\lambda_i)$ $\quad V = \mathrm{Eig}(f,\lambda_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Eig}(f,\lambda_k)$

$\Rightarrow f$ db.

i) $\Rightarrow$ ii)

Sei f db $\Rightarrow \dim \mathrm{Eig}(f,\lambda) = \mu(P_f,\lambda) \overset{\text{Bem 12}}{=} \dim \mathrm{Hau}(f,\lambda)$

Wegen $\mathrm{Eig}(f,\lambda) \subset \mathrm{Hau}(f,\lambda)$ folgt $\mathrm{Eig}(f,\lambda) = \mathrm{Hau}(f,\lambda)$. $\square$

Kor 14:

Sei $f: V \to V$ diagonalisierbar und $W \subset V$ invarianter Unter-VR. Dann ist auch $g = f|_W : W \to W$ diagonalisierbar. (Bew: Übung)

<u>Satz 15</u>:

Seien $f_1, \dots, f_m \in \mathrm{End}(V)$ diagonalisierbar und es gelte $f_i \circ f_j = f_j \circ f_i$ $\forall i, j$. Dann können $f_1, \dots, f_m$ <u>simultan</u> diagonalisiert werden, d.h. es existiert eine Basis $v_1, \dots, v_n$ von V, so daß v_i Eigenvektor <u>aller</u> f_j ist für $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$.

<u>Bew</u>:

Sei $m = 2$. Allgemein per Induktion. Sei $f := f_1$, $g := f_2$.

Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die Eigenwerte von f und

$$V_i := \mathrm{Eig}(f, \lambda_i).$$

Es ist $f|V_i = \lambda_i \cdot \mathrm{id}_{V_i}$.

<u>Beh</u>: V_i ist g-invar.

Sei $v \in V_i$ (also $f(v) = \lambda_i v$).

<u>ZZ</u>: $g(v) \in V_i$

$f(g(v)) = g(f(v)) = g(\lambda_i v) = \lambda_i g(v)$

$\Rightarrow g(v) \in V_i$. ✓

$\overset{\text{Kor 14}}{\Rightarrow}$ $g|V_i$ ist db. $\forall i = 1, \dots, k$.

Man erhält Basis von Eigenvektoren von g, die automatisch Eigenvektoren von f sind. □

<u>Kor 16</u>: Sind $f, g \in \mathrm{End}(V)$ diagonalisierbar und vertauschbar,

so sind auch $f\circ g$ und $f\pm g$ diagonalisierbar.

Bew: Übung $\square$

§3 Die Jordanzerlegung

Sei $f: V \to V$ Endomorphismus des K-VR V, $P_f(x) \in K[x]$ zerfalle in Linearfaktoren

$$P_f(x) = (x-\lambda_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (x-\lambda_k)^{m_k} \qquad (\lambda_i \neq \lambda_j \text{ für } i \neq j)$$

Es sei $V_i = \mathrm{Hau}(f, \lambda_i) \overset{§2\,\text{Satz } 11}{=} \mathrm{Eig}_{m_i}(f, \lambda_i)$.

Nach Satz 11 gilt

$$V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k .$$

Es sei

$$p_i : V \to V$$

der Projektionsoperator auf V_i, d.h. die eindeutig best. lin. Abb mit

$$p_i(v) = \begin{cases} v, & \text{falls } v \in V_i \\ 0, & \text{falls } v \in V_j,\ j \neq i. \end{cases}$$

Für $v = v_1 + \ldots + v_k$ mit $v_i \in V_i$ ist also

$$p_i(v) = v_i .$$

Bem 1:

p_i läßt sich als Polynom mit Koeff. in K in f darstellen.

Bew:

OBdA für $i = 1$.

Betr. also p_1.

Wir faktorisieren $\mathcal{P}_f(x) = P_1(x) \cdot P_2(x)$

mit

$P_1(x) = (x-\lambda_1)^{m_1}$

$P_2(x) = (x-\lambda_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (x-\lambda_k)^{m_k}$.

P_1 und P_2 sind teilerfremd.

Nach §2 Satz 14 ex $Q_1, Q_2 \in K[x]$

mit

$(*) \quad Q_1 P_1 + Q_2 P_2 = 1 \in K[x]$.

Nach §2 Satz 11 gilt $V_1 = \mathrm{Kern}(P_1(f))$.

$\Rightarrow p_1 = (Q_2 \cdot P_2)(f)$, denn für

$v \in V_1$ gilt

$$\begin{aligned}(Q_2 \cdot P_2)(f)(v) &\overset{(*)}{=} v - (Q_1 P_1)(f)(v) \\ &= v - Q_1(f)\underbrace{P_1(f)(v)}_{=0} \\ &= v,\end{aligned}$$

und für $v \in V_i$, $i = 2, \ldots, k$ ist

$P_2(f)(v) = 0$. $\square$

Satz 2:

Sei f wie oben. Dann ex eine

Zerlegung $f = g + h$

in einen d.b. Endomorphismus

g und einen nilpotenten End.

h, die sich beide als Pol in

f darstellen lassen. Insbesondere vertauschen g und h.

Bew: Mit den Eigenwerten λ_i von f und den Projektionsoperatoren p_i definieren wir

$$g = \lambda_1 p_1 + \dots + \lambda_k p_k \in \mathrm{End}(V).$$

Per Konstruktion ist g dlb und nach Bem 1 ist g ein Pol in f.
Sei

$$h = f - g.$$

Dann ist auch h Pol in f und

$$f = g + h.$$

Noch ZZ: h ist nilpotent
Da V_i h-invariant ist ($\forall i = 1, \dots, k$) genügt es ZZ, daß

$$h|V_i \in \mathrm{End}(V_i)$$

nilpotent ist.
Es ist aber

$$h|V_i = f|V_i - \lambda_i \cdot id_{V_i}$$
$$= (f - \lambda_i \cdot id)|V_i$$

Wegen $V_i = \mathrm{Kern}((f - \lambda_i id)^{m_i})$
ist $h|V_i$ nilpotent. $\square$

Satz 3: (Jordan-Zerlegung)
Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ und $P_f \in K[x]$ zerfalle in Linearfaktoren in $K[x]$. Dann ex eine Zerlegung

$$f = g + h, \quad g, h \in \mathrm{End}(V),$$

wobei g dlb und h nilpotent, und $g \circ h = h \circ g$.

Eine solche Zerlegung ist eindeutig und g, h sind Polynome in f.

Bew: Existenz: Satz 2.

Eindeutigkeit: Sei $f = g + h$ eine Zerlegung von f wie in Satz 2 mit g db, h nilpotent, g, h Polynome in f.

Sei $f = g' + h'$ eine zweite Zerlegung mit g' db, h' nilpotent, g' und h' vertauschbar (nicht notw. Polynome in f).

g', h' vertauschbar $\Rightarrow$ g' u. $f = g' + h'$ vertauschbar.

$\underset{g, h \text{ Pol. in } f}{\Longrightarrow}$ g' vertauschbar mit g und h.

Wir haben $g + h = g' + h'$

$\Rightarrow$ $g - g' = h' - h$.

g, g' db u. vertauschbar
$\Rightarrow$ $g - g'$ db.

h, h' nilpotent und vertauschbar.
$\Rightarrow$ $h' - h$ nilpotent, denn
$(h' - h)^N = \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} (h')^i \circ h^{N-i}$

Ist n groß genug, so ist in jedem Summanden $(\ell')^i$ oder ℓ^{n-i} gleich 0.

$\Rightarrow$ $g - g'$ ist dB und nilpotent

$\Rightarrow$ alle Eigenwerte gleich 0

$\Rightarrow$ $g = g'$.

$\Rightarrow$ $\ell = \ell'$. □

§4 Zyklische Vektoren

... sind das „Gegenteil" von Eigenvektoren.

Sei V ein K-VR, $\dim V < \infty$, $f : V \to V$ Endom.

Def: Ein Vektor $a \in V$ heißt <u>zyklisch</u>, falls

$$V = \mathrm{Lin}(a, f(a), f^2(a), \ldots)$$

Falls V einen zyklischen Vektor besitzt, so nennt man (V, f) <u>zyklisch</u>.

<u>Bsp</u>: Für $a \in V$ ist $V(a) = \{P(f)a \,;\, P \in K[X]\}$ der von a <u>erz.</u> zyklische Unter-VR.

(*) <u>Satz 1</u>:

Es existiert eine Zerlegung

$$V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_m$$

so daß:

i) V_i ist f-invar., so daß $f_i := f|V_i : V_i \to V_i$ Endom.

ii) (V_i, f_i) ist zyklisch $\forall i$.

<u>Bem</u>: Für $a \in V$ ist $V(a) \subset V$ f-invariant.

Für $a_1, \dots, a_m \in V$ bildet

(*) $V(a_1, \dots, a_m) = V(a_1) + \dots + V(a_m) \subset V$ = kleinste Unter-VR von V, der $V(a_1), \dots, V(a_m)$ enthält.

Für $a_1, \dots, a_m$ <u>geeignet</u> ist $V(a_1, \dots, a_m) = V$.

(z.B., falls $a_1, \dots, a_m$ Basis von V.)

1) Es sei $m \in \mathbb{N}$ <u>minimal</u>, so daß es $a_1, \dots, a_m \in V$ gibt mit

$$V = V(a_1, \dots, a_m)$$

Im allgemeinen gibt es dann viele solche m-Tupel [$a_1, \dots, a_m$, so daß $V = V(a_1, \dots, a_m)$] und die Summenzerlegung

$$V = V(a_1) + \dots + V(a_m)$$

ist im allg. <u>nicht</u> direkt.

Wir zeigen nun, daß für <u>geeignete Wahl</u> von $a_1, \dots, a_m$ die Summe direkt ist.

2) Eine <u>Relation</u> von $(a_1, \dots, a_m)$ ist ein m-Tupel $(R_1, \dots, R_m)$ von Pol in $K[x]$ so daß gilt

$$R_1(f)a_1 + \dots + R_m(f)a_m = 0 .$$

z.B. kann man $R_1 = \dots = R_m = P_f$ wählen.

Ist $(R_1, \dots, R_m)$ eine nicht-triviale Relation, so heißt

$$\min\{\operatorname{grad}(R_i) \mid R_i \neq 0\}_{i=1,\dots,m} \in \mathbb{N}_0$$

der <u>Grad der Relation</u>

Es sei nun $(R_1, \dots, R_m)$ eine Relation zu $(a_1, \dots, a_m)$ mit <u>minimalem</u> Grad $d \in \mathbb{N}_0$.
<u>OBdA</u> sei $R_1 \neq 0$, $\operatorname{grad} R_1 = d$

Es sei $d \in \mathbb{N}_0$ minimal mit der Eigenschaft:
Es gibt $a_1, \dots, a_m \in V$ mit $V = V(a_1, \dots, a_m)$ und eine Relation $(R_1, \dots, R_m)$ zu $(a_1, \dots, a_m)$ vom Grad d.

Dann ist OBdA $R_1 \neq 0$ und $\operatorname{grad} R_1 = d$.

<u>Beh</u>: Bei <u>geeigneter</u> Wahl von $(a_1, \dots, a_m)$ können wir sogar erreichen, daß
$R_2 = \dots = R_m = 0$ (und $R_1 \neq 0$, $\operatorname{grad} R_1 = d$)

<u>Denn</u>: Falls $R_2 \neq 0$,
so wähle $A, B \in K[x]$ mit

$$R_2 = AR_1 + B, \quad \operatorname{Grad} B < \operatorname{grad} R_1$$

Setze $b_1 = a_1 + A(f)a_2$

$b_i = a_i \quad , i = 2 \ldots m.$

$\Rightarrow \quad S_1(f)b_1 + S_2(f)b_2 + \ldots + S_m(f)b_m = 0$

mit $S_1 = R_1$

$S_2 = R_2 - AR_1 = B$

$S_i = R_i \quad , i = 3, \ldots, m.$

Dann gilt $B = 0$, denn sonst wäre $(S_1, \ldots, S_m)$ eine Relation mit kleinerem Grad als $(R_1, \ldots, R_m)$.

$\Rightarrow$ Wir erreichen $R_2 = 0$.

Genauso für die weiteren R_i, $i \geq 2$.

3) Also $R_1(f)a_1 = 0$.

Bel: $\quad V(a_1) \cap V(a_2, \ldots, a_m) = 0.$

Sei dazu $P_1 \in k[x]$ mit

$P_1(f)(a_1) \in V(a_2, \ldots, a_m)$.

Dann ex $P_2, \ldots, P_m \in k[x]$ mit

$P_1(f)(a_1) + \ldots + P_m(f)(a_m) = 0$

Wie in 2) ziehen wir Vielfaches der Rel $R_1(f)(a_1) = 0$ ab, nutze Division mit Rest und die Minimalität der Rel. $R_1(f)(a_1) = 0$, um zu sehen daß P_1 durch

R_1 teilbar ist.

$\Rightarrow \quad P_1(f)(a_1) = 0$.

$\Rightarrow$ Beh.

4) Wir haben nun

$$V = V(a_1) \oplus V(a_2, \dots, a_m).$$

Die Beh. des Satzes folgt per Induktion. $\square$

Wir betrachten nun die Zerlegung in zyklische Unterräume speziell für nilpotente Endomorphismen.

Sei V K-VR, $n = \dim V < \infty$.

<u>Bem 2</u>:

Ein Endom. $f: V \to V$ ist nilpotent genau dann wenn $P_f(X) = X^n$.

<u>Bew</u>: „$\Rightarrow$" § 2 Bem 8

„$\Leftarrow$": Sei $P_f(X) = X^n$.

Cayley-Hamilton: $P_f(f) = 0$

$\Rightarrow \quad f^n = 0$

$\Rightarrow \quad f$ nilpotent. $\square$

<u>Satz 3</u>:

Sei $f: V \to V$ nilpotenter End. und (V, f) sei zyklisch.

Dann ist eine Basis B von V,