Es gilt auch die Umkehrung von Satz 6. Genauer haben wir

Satz 6': Sei $f: V \to V$ Endom. Es sind äqu.:
i) f ist normal
ii) V besitzt eine ONB aus Eigenvektoren von f

Bew: i => ii: Eben gemacht.
ii => i:
Sei $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ eine ONB von V aus Eigenvektoren und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ ~~die~~ zug. Eigenwerte von f, also
$$f(b_i) = \lambda_i b_i.$$
$\overset{\text{Lemma 5}}{\Longrightarrow}$
$$f^*(b_i) = \bar{\lambda}_i b_i \quad \langle b_i, f^*(b_j)\rangle = \langle f(b_i), b_j\rangle = \bar{\lambda}_j \delta_{ij}$$
$$\Rightarrow f f^*(b_i) = f(\bar{\lambda}_i b_i) = \bar{\lambda}_i \lambda_i b_i$$
$$= \lambda_i \bar{\lambda}_i b_i = \lambda_i f^*(b_i)$$
$$= f^*(\lambda_i b_i) = f^* f(b_i)$$
Die lin Abb ff^* und f^*f stimmen also auf der Basis $\mathcal{B}$ überein
$\Rightarrow ff^* = f^*f$. □

Matrizenversion:

Satz 7: Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Es sind äquivalent:
i) A ist normal (d.h. $AA^* = A^*A$)
ii) Es gibt $U \in U(n, \mathbb{C})$ (d.h. $U^*U = E_n$), so daß $U^*AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ diag.

Bew: Folgt direkt aus Satz 6. $\square$

Bem 8: Sei $f: V \to V$ normal

i) f ist selbstadj. $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte sind reell

ii) f ist unitär $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte haben Betrag $= 1$.

Bew: i) Sei $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ ONB aus Eigenvektoren, $f(b_i) = \lambda_i b_i$

f selbstadj. $\Leftrightarrow \langle f(b_i), b_j \rangle = \langle b_i, f(b_j) \rangle \quad \forall i,j$

$\Leftrightarrow \lambda_i \langle b_i, b_j \rangle = \overline{\lambda_j} \langle b_i, b_j \rangle \quad \forall i,j$

$\overset{\mathcal{B}\text{ ONB}}{\Leftrightarrow} \lambda_i \langle b_i, b_i \rangle = \overline{\lambda_i} \langle b_i, b_i \rangle \quad \forall i$

$\Leftrightarrow \lambda_i = \overline{\lambda_i} \quad \forall i$

ii) Übung $\square$

Satz 9

Sei $f: V \to V$ ein Endomorphismus endlicher Ordnung (d.h. es ex. $m \in \mathbb{N}$ mit $f^m = id_V$). Dann ist f diagonalisierbar.

Bew: Definiere ein neues Skalarprodukt auf V durch

$$[a, b] = \sum_{i=1}^{m} \langle f^i(a), f^i(b) \rangle$$

$[\cdot,\cdot]$ ist auch hermitesches Skalarprodukt.

f ist unitär bezügl. dieses Skalarproduktes, denn

$$[f(a), f(b)] = \sum_{i=1}^{m} \langle f^{i+1}(a), f^{i+1}(b) \rangle$$

$$= \sum_{i=2}^{m+1} \langle f^{i}(a), f^{i}(b) \rangle$$

$$= [a, b].$$

Hier haben wir benutzt, daß

$$\langle f^{m+1}(a), f^{m+1}(b) \rangle = \langle f(a), f(b) \rangle.$$

Satz 6 $(V, [\cdot,\cdot])$ besitzt ONB aus Eigenvektoren von f. □

Bem 10:
Sei $f: V \to V$ Endom. der Ordnung $m \in \mathbb{N}$ (d.h. $f^m = id_V$). Dann sind die Eigenwerte von V m-te Einheitswurzeln (d.h. $\lambda^m = 1$ $\Rightarrow \lambda = e^{2\pi i k/m}, k \in \mathbb{Z}$).

Bew: Übung. □

II Die Jordansche Normalform

Sei K Körper, V ein K-VR der Dimension n < ∞.

Erinnerung: Sei $f: V \to V$ Endom., $P_f(x) \in K[x]$ char. Pol. $P_f(x) = \det(x\,\mathrm{id} - f)$

Trigonalisierbarkeit:
f ist trigonalisierbar gdw.
$P_f(x) \in K[x]$ zerfällt in Linearfaktoren über K.

Diagonalisierbarkeit: Es sind äquiv.
1) f ist diagonalisierbar ~~gdw~~
2) (i) $P_f(x) \in K[x]$ zerfällt in Linearfaktoren
(ii) Für jede Nullst. $\lambda \in K$ von $P_f(x)$ gilt
$$\mu(P_f, \lambda) = \dim \mathrm{Eig}(f, \lambda)$$ („≥" gilt immer)
3) Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die paarw. versch. Eigenwerte von f, so gilt
$$V = \mathrm{Eig}(f, \lambda_1) \oplus \dots \oplus \mathrm{Eig}(f, \lambda_k)$$
(→ Übung, Blatt 1, A5)

§1 Der Satz von Cayley-Hamilton

Sei $P = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \in K[x]$ ein Polynom und $f: V \to V$ Endo.

Wir können f in P einsetzen, d.h. $P(f) = a_n f^n + a_{n-1} f^{n-1} + \dots + a_0 \mathrm{id}_V \in \mathrm{End}(V)$ betrachten.

Satz 1 (Cayley-Hamilton)

Sei $f: V \to V$ Endom. und $P_f \in K[x]$ das char. Pol von f. Dann gilt
$$P_f(f) = 0 \in \mathrm{End}(V),$$
d.h. $P_f(f)(v) = 0 \quad \forall v \in V$

$P_f(x) = \det(x\,\mathrm{id} - f)$

Bew:
Sei $v \in V$.
ZZ: $P_f(f)(v) = 0$ OBdA $v \neq 0$

1) Es sei $r \in \mathbb{N}$ minimal, so daß
(*) $v, f(v), f^2(v), \dots, f^r(v)$ l.a. und
Offenbar ist $r \le n = \dim V$, und $v, f(v), \dots, f^{r-1}(v)$ sind l.u.
Sei
$$U = \mathrm{Lin}(v, f(v), \dots, f^{r-1}(v)) \subset V$$
Unter-VR.
Offenbar ist $B = (v, f(v), \dots, f^{r-1}(v))$ eine Basis von U, und f bildet U auf sich selbst ab, d.h.
$$f|_U \in \mathrm{End}(U).$$
Bezüglich der Basis B hat $f|_U$ die darst. Matrix
$$A = M_B^B(f|_U) = \begin{pmatrix} 0 & & & c_0 \\ 1 & \ddots & & c_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & c_{r-1} \end{pmatrix}$$

(*) Dann gibt es $c_0, \dots, c_{r-1} \in K$, so daß
$$f^r(v) = c_0 v + c_1 f(v) + \dots + c_{r-1} f^{r-1}(v).$$

Folglich ist das char. Pol von $f|_U$

$$P_{f|_U}(x) = \det \begin{pmatrix} X & & & -c_0 \\ -1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & & \vdots \\ & -1 & X & -c_{r-2} \\ & & -1 & (X - c_{r-1}) \end{pmatrix}$$

$$= (X - c_{r-1}) \cdot X^{r-1} - c_{r-2} X^{r-2} - c_{r-3} X^{r-3} - \dots - c_0$$

(Entwicklung nach letzter Spalte)

$$= X^r - c_{r-1} X^{r-1} - c_{r-2} X^{r-2} - \dots - c_0$$

$$\Rightarrow P_{f|_U}(f)(v) = f^r(v) - c_{r-1} f^{r-1}(v) - \dots - c_1 f(v) - c_0 v$$

$$\Rightarrow P_{f|_U}(f)(v) = 0 .$$

2) Ergänze die Basis B von U zur Basis C von V.

$$\Rightarrow M_C(f) = \begin{array}{cc} r & n-r \\ \left(\begin{array}{c|c} M_B^B(f|_U) & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right) \end{array}$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} A & * \\ \hline 0 & A' \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow P_f(x) = P_{f|_U}(x) \cdot P_{A'}(x)$$

$$\Rightarrow P_f(f)(v) = \cancel{P_{f|_U}(f) \cdot P_{A'}} \; P_{A'}(f) \cdot \underbrace{P_{f|_U}(f)(v)}_{=0}$$

$$= 0 . \qquad \square$$

§ 7 Zerlegung in Haupträume

<u>Erinnerung</u>: Division mit Rest

Im $\mathbb{Z}$:

<u>Satz 1</u>: Seien $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$.
Dann gibt es eindeutig best. $x, y \in \mathbb{Z}$ mit

$$a = bx + y \quad \text{und } 0 \leq y < |b|.$$

<u>Bew</u>: Induktion nach $|b|$ (Übung) □

Zwei ganze Zahlen a, b heißen teilerfremd, falls es außer ± 1 keinen gemeinsamen Teiler d von ~~a, b~~ a und b gibt.

<u>Satz 2</u>:
Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ teilerfremd. Dann kann man aus a und b die 1 $\mathbb{Z}$-linear kombinieren, d.h. es ex $x, y \in \mathbb{Z}$ mit

$$ax + by = 1.$$

<u>Bew</u>: Ind nach $\min(|a|, |b|)$, Übung □

Analoge Aussagen gelten für Polynome über einem Körper K mit folgenden Ersetzungen

$$\mathbb{Z} \longrightarrow K[x]$$
$$|\cdot| \longrightarrow \operatorname{grad}(\cdot)$$
$$\{\pm 1\} \longrightarrow K^*$$

Satz 3: Seien $P, Q \in K[x]$ Polynome über K, $Q \neq 0$. Es gibt eind. best. Pol $A, B \in K[x]$ mit

$$P = AQ + B \quad \text{und} \quad \begin{cases} \text{grad}(B) < \text{grad}(Q) \\ \text{oder } B = 0 \end{cases}$$

Bew: Übung

Def: i) Ein Pol $Q \in K[x]$ **teilt** $P \in K[x]$, falls es $A \in K[x]$ gibt mit

$$P(x) = Q(x)\,A(x) \qquad \text{„}Q \mid P\text{"}$$

ii) $P, Q \in K[x]$ heißen **teilerfremd**, falls die konstanten Pol ($\neq 0$) die einzigen gemeinsame Teiler von P und Q sind.

Satz 4: Seien $P, Q \in K[x]$ teilerfremd. Dann ex $A, B \in K[x]$ so daß gilt

$$AP + BQ = 1.$$

Übung

Bem 5: Sei K alg abg. $P, Q \in K[x]$ sind teilerfremd
$\Longleftrightarrow$ P, Q haben keine gemeinsame Nullst in K.

Sei K Körper, V ein K-VR, $\dim V < \infty$
$f: V \to V$ Endomorphismus.

Def: Ein Unter-VR $W \subset V$ heißt **invariant**, falls $f(W) \subset W$