Dann ist $V = H \oplus Kv$ und $\dim H = n-1$.
Es gilt $s(H) \subset H$ und $s' := s|_H$ ist (105)
Isometrie des n.a.q.R. (H, q_H).
Per Induktion ex Spiegelungen ~~ex~~ $t_1, \dots, t_r \in O(H)$,
$r \leq n-1$, an Hyperebenen von H, so daß

$$s' = t_1 t_2 \cdots t_r .$$

Definiere lin. Abb $s_i : V \to V$ durch

$$s_i(x) = t_i(x) \quad \forall\, x \in H,$$
$$s_i(v) = v .$$

Diese sind Isometrien von (V, q), die eine Hyperebene von V fest lassen, und die $\neq id_V$ sind.
$\overset{\text{Bem 5}}{\Rightarrow}$

$s_i \in O(V)$ Spiegelung.
Damit ist $s = s_1 \cdots s_r$ Produkt von Spiegelungen.

2) Wir betrachten nun den Fall daß
s keinen anisotropen Fixvektor hat.
$\overset{\text{Vorüb}}{\Rightarrow}$ V enthält anisotr. Vektor v, so (so $\Rightarrow$ ti $\Rightarrow$ so... aniso)
daß $sv - v$ anisotrop ist.
$\overset{\text{Lemma 8}}{\Rightarrow}$ Es ex Spiegelung s_0, so daß $s_0 s$ den Vektor v fest läßt.
$\overset{1)}{\Rightarrow}$ $s_0 s = s_1 \circ \dots \circ s_r$ mit Spiegelungen
$s_1, \dots, s_r \in O(V)$, $r \leq n-1$.
$\overset{s_0^2 = id}{\Rightarrow}$ $s = s_0 s_1 \cdots s_r$. $\square$

Lemma 10: Es gelte $\dim V = 2$.
Für $s \in O(V,q)$, $s \neq id$ sind äquivalent:

i) $s \in SO(V,q)$, d.h. $\det s = 1$
ii) s ist Produkt von 2 Spiegelungen
iii) 0 ist der einzige Fixvektor von s.

Bew: Übung.

Hieraus kann man folgern, daß $SO(V,q)$ für $\dim V = 2$ abelsch ist.
Für $\operatorname{char} K \neq 2,3$ ist $O(V,q)$ nicht abelsch.

§7 Quadratische Formen über $\mathbb{R}$

§7 Quadratische Formen über $\mathbb{R}$

Bisher: (V,q) qR über Körper K (char $K \neq 2$)

Nun betrachten wir speziell $K = \mathbb{R}$.

Im Folgenden bezeichnet V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, mit $\dim V = n$, und q eine n.a. quadratische Form auf V.

Bem 1: Unter diesen Voraussetzungen gilt

$$q \simeq [\underbrace{1, \dots, 1}_{r}, \overbrace{-1, \dots, -1}^{n-r}],$$

mit e. ganzen Zahl $r \geq 0$.

- Für Matrizen formuliert heißt dies:
Jede symmetrische Matrix $A \in GL(n, \mathbb{R})$ ist kongruent zu e. Diagonalmatrix der Form

$$\mathrm{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{r}, -1, \dots, -1) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & -E_{n-r} \end{pmatrix}.$$

Bew: q n.a. $\Rightarrow$ Es gibt OB $b_1, \dots, b_n$

$\cancel{q(b_i, b_j)}$

$\beta(b_i, b_j) = 0$ für $i \neq j$

- q ist dann eindeutig bestimmt durch n reelle Zahlen

$$a_i := q(b_i) \qquad 1 \leq i \leq n.$$

(q n.a. $\Rightarrow$) $a_i \neq 0$, also entweder $a_i > 0$ oder $a_i < 0$ für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$.

(evtl. umnummerieren) OE sei $a_1, \dots, a_r > 0$ und $a_{r+1}, \dots, a_n < 0$.

Setze $c_i = \frac{1}{\sqrt{a_i}} b_i$ für $1 \leq i \leq r$

und $c_i = \frac{1}{\sqrt{-a_i}} b_i$ für $r+1 \leq i \leq n$.

gilt $c_1, \dots, c_n$ ist OB von V und

$$q(c_i) = \begin{cases} \left(\frac{1}{\sqrt{a_i}}\right)^2 a_i = +1 & \text{für } 1 \le i \le r \\ \left(\frac{1}{\sqrt{-a_i}}\right)^2 a_i = -1 & \text{für } r+1 \le i \le n. \end{cases}$$

Folglich ist $q \simeq [\underbrace{1, \dots, 1}_{r}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{n-r}]$.

(Für Matrizen: Ist A die zu q gehörige Matrix,

$q \simeq [1, \dots, 1, -1, \dots, -1]$

$\Rightarrow$ A kongruent zu $2\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & -E_{n-r} \end{pmatrix}$

(zu $[1, \dots, 1, -1, \dots, -1]$ gehörige Matrix)

A reelle Matrix

$\Rightarrow$ A kongruent zu $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & -E_{n-r} \end{pmatrix}$,

da $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} E_n\right)^t \begin{pmatrix} 2E_r & 0 \\ 0 & -2E_r \end{pmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} E_n\right) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & -E_{n-r} \end{pmatrix}$.) $\square$

Nachfolgend zeigen wir nun, dass r nur von (V, q) abhängt und eindeutig bestimmt ist.

Satz 2 (Sylvesterscher Trägheitssatz)

Unter den obigen Voraussetzungen ist die Zahl r aus Bem 1 eindeutig bestimmt.

(D.h. ist V n-dim $\mathbb{R}$-V.R und q n.a. q.F. auf V, dann gibt es ~~eindeutig~~ genau ein $r \ge 0$, s.d. $q \simeq [\underbrace{1, \dots, 1}_{r}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{n-r}]$.)

Matrizentheoretisch formuliert:

Gilt für ganze Zahlen $0 \le r \le n$, $0 \le r' \le n$

$$\begin{pmatrix} E_{r'} & 0 \\ 0 & -E_{n-r'} \end{pmatrix} = S^t \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & E_{n-r} \end{pmatrix} S$$

mit einer reellen $n \times n$-Matrix S, so gilt notwendig $r = r'$.

Beweis: $\overset{\text{Bem } 1}{\Longrightarrow}$ $q \simeq [\underbrace{1,\dots,1}_{r},\underbrace{-1,\dots,-1}_{n-r}]$

mit einer ganzen Zahl $r \geq 0$

Es gelte nun auch $q \simeq [\underbrace{1,\dots,1}_{r'},\underbrace{-1,\dots,-1}_{n-r'}]$ mit r' ganz, $r' \geq 0$

also $[\underbrace{1,\dots,1}_{r'},-1,\dots,-1] \simeq [\underbrace{1,\dots,1}_{r},-1,\dots,-1]$

OE sei $r' \geq r$. <u>Annahme</u>: $r' > r$.

Wir haben dann

$$[\underbrace{\overbrace{1,\dots,1}^{r},1,\dots,1}_{r'},\underbrace{-1,\dots,-1}_{n-r'}] \simeq [\underbrace{1,\dots,1}_{r},\underbrace{-1,\dots,-1,\overbrace{-1,\dots,-1}^{n-r'}}_{n-r}]$$

stimmen überein

$$[\underbrace{1,\dots,1}_{r}] \simeq [\underbrace{1,\dots,1}_{r}]$$

Wittscher Kürzungssatz (Satz 9, §4) $\Longrightarrow$

$$[\underbrace{1,\dots,1}_{r'-r},\underbrace{-1,\dots,-1}_{n-r'}] \simeq [\underbrace{-1,\dots,-1}_{n-r}]$$

Aber: Die Diagonalform auf der rechten Seite stellt nur reelle Zahlen ≤ 0 dar (d.h. $q(v) \leq 0$ für jedes $v \in V$), die auf der linken Seite stellt hingegen sowohl positive als auch negative Zahlen dar.

$\Rightarrow$ nicht äquivalent

<u>Widerspruch</u>! $\Rightarrow$ $r' = r$.

(Da die zu $[\underbrace{1, \dots, 1}_{r}, -1, \dots, -1]$ gehörige Matrix $2\begin{pmatrix} E_r & \\ & E_{n-r} \end{pmatrix}$ ist, folgt hieraus auch die Aussage über Matrizen.) Genaue Ausformulierung: Übung $\square$

Wir haben also gesehen, dass für einen n.a. reellen quadratischen Raum (V, q) die Zahlen r und $n-r$ eindeutig festgelegt sind.

V n.a. q.R über $\mathbb{R}$

Def 3: Sei V wie oben und q n.a quadratische Form auf V. Gilt $q \simeq [\underbrace{1, \dots, 1}_{r}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{s}]$ mit ganzen Zahlen $r, s \geq 0$

- so nennt man das Paar (r, s) die Signatur von q.

Def 4: Eine quadratische Form q auf einem beliebigen $\mathbb{R}$-Vektorraum V heißt

~~positiv definit wenn~~

positiv semi-definit wenn $q(x) \geq 0$ für alle $x \in V$

- gilt sogar $q(x) > 0$ für alle $x \neq 0$, $x \in V$ so heißt q positiv definit.

Gilt hingegen $q(x) \leq 0$ für jedes $x \in V$ nennt man q negativ semi-definit.

Negativ definit nennt man q, wenn $q(x) < 0$ für alle $x \neq 0, x \in V$.

Ist q weder positiv noch negativ semi-definit so heißt q indefinit.

Bem. 5: Sei (V, q) q.R. über $\mathbb{R}$.
Ist q pos. def., so gilt $\det B > 0$ für die Strukturmatrix bezügl. einer bel. Basis $b_1, \dots, b_n$ von q.
Ist q pos. semidef., so gilt $\det B \geq 0$.

Bew: Ist $c_1, \dots, c_n$ eine weitere Basis und C die zug. Strukturmatrix, so gilt $\det C = \lambda^2 \det B$ mit $\lambda \in \mathbb{R}^*$.
$\Rightarrow$ $\operatorname{sign}(\det B)$ ist unabhängig von Basiswahl.
Wähle für $b_1, \dots, b_n$ nun eine OB.
$\Rightarrow$ $\det B = \frac{1}{2} \beta(b_1, b_1) \cdot \ldots \cdot \beta(b_n, b_n)$
q pos def $\Rightarrow$ $\beta(b_i, b_i) > 0 \quad \forall i$
q pos semi def $\Rightarrow$ $\beta(b_i, b_i) \geq 0 \quad \forall i$
$\Rightarrow$ Beh. $\square$

Def: Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt pos. def. wenn die q.F q_A auf $\mathbb{R}^n$ pos. def. ist, d.h. falls

$$x^t A x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Entsprechend pos. semidef., neg. def....

Bem 6: A pos def $\Rightarrow \det A > 0$
A " semidef $\Rightarrow \det A \geq 0$.

Achtung: Aus $\det(A) > 0$ folgt i.A. nicht, daß A pos. def. ist. Bsp $A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$.

Satz 7: (Determinanten-Kriterium).
Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symm. Matrix.
A ist pos def $\Longleftrightarrow$ $\det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} > 0$ $\forall k = 1, \ldots, n$.

Bew: „$\Rightarrow$" folgt leicht aus Bem 5.
„$\Leftarrow$" Induktion nach n. $\square$

Achtung: Für pos semidef gilt das Kriterium nicht analog: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ erfüllt $a_{11} \geq 0$, $\det A \geq 0$, aber A ist nicht pos semidef.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Satz 8:
Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symm. Matrix.
A ist pos semidef $\Longleftrightarrow$ Alle Hauptunterdeterminanten von A sind ≥ 0, d.h. $\forall k = 1, \ldots, n$ und alle k-elementigen Teilmengen $S = \{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, n\}$ gilt
$$\det A_S := \det\begin{pmatrix} a_{i_1 i_1} & \cdots & a_{i_1 i_k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_k i_1} & \cdots & a_{i_k i_k} \end{pmatrix} > 0$$

Bew: Übung. $\square$

Satz 9: (Variante des Sylvesterschen THS)
Sei (V,q) n.a. q.R über $\mathbb{R}$.
Dann ~~kann~~ läßt sich V als orthogonale Summe

$$V = U_1 \oplus U_2$$

schreiben, wobei q_{U_1} pos def und q_{U_2} neg def. Die Größen

$$r = \dim U_1$$
$$s = \dim U_2$$

sind durch (V,q) eindeutig bestimmt (Signatur).

Bew: Satz 2. $\square$

Satz 10: (Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung).
Sei (V,q) q.R über $\mathbb{R}$, pos. semidef.
Es gilt

$$\beta(x,y)^2 \leq \beta(x,x)\,\beta(y,y) \quad \forall\, x,y \in V.$$

Bew: OBdA $V = \mathrm{Lin}(x,y)$.
$\dim V = 0 \Rightarrow x = y = 0$ ✓
$\dim V = 1 \Rightarrow$ l.S = r.S wegen Bilinearität.
$\dim V = 2$: Bzg der Basis x,y hat β die Grammatrix

$$B = \begin{pmatrix} \beta(x,x) & \beta(x,y) \\ \beta(x,y) & \beta(x,x) \end{pmatrix}$$

Bem 5 $\Rightarrow$ $\det B \geq 0$

$\Rightarrow$ Beh. $\square$

Bem 9:

Sei (V, q) pos def q.R. über $\mathbb{R}$.
Dann gilt in der CS-Ungl. das „=" Zeichen genau wenn x, y linear abhängig sind.

Bew: „$\Leftarrow$": klar

„$\Rightarrow$":
$$\beta(x,y)^2 = \beta(x,x)\beta(y,y)$$
$$\Rightarrow \det B = 0$$
$$\overset{\text{q.u.a.}}{\Rightarrow} x, y \text{ l.a.} \qquad \square$$

Bem: Eine pos. def. q.F q auf einem $\mathbb{R}$-VR V heißt Skalarprodukt auf V.

In diesem Fall kann man zu (V, q) eine Orthonormalbasis (ONB) finden. Z.B. mit dem Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren.

Für pos. def. symmetrische Matrizen bedeutet dies:

Satz 10: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A = A^t$, $A > 0$.

Es ex eine obere Dreiecksmatrix $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so daß

$$C^t A C = E_n \, .$$

<u>Kor 11</u>: A wie in Satz 10 läßt sich als $A = B^t B$ schreiben mit einer oberen Dreiecksmatrix B.

<u>Bem 12</u>: Sei $\Gamma \in GL_n(\mathbb{R})$. Dann ist $\Gamma^t \Gamma$ symmetrisch und pos def.

<u>Bew</u>: symmetrisch: klar

Pos def: Sei $x \in \mathbb{R}^n$.

$$x^t \Gamma^t \Gamma x = (\Gamma x)^t (\Gamma x)$$

$$= \| \Gamma x \|_2^2 \geq 0, \text{ und } = 0$$

g.d.w. $\Gamma x = 0$

$\Rightarrow x = 0$. $\square$