I. Euklidische und unitäre Vektorräume

§1 Euklidische Vektorräume (Fortsetzung)

Sei $(V, \langle\, ,\, \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum. D.h. V ist ein $\mathbb{R}$-VR und $\langle\, ,\, \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ ist ein euklidisches Skalarprodukt.

Die Dimension von V sei $n < \infty$.

Wir haben bereits gezeigt:

<u>Satz 1</u>: V besitzt eine Orthonormalbasis (ONB).

Wir geben einen zweiten Beweis.
Er benutzt das „Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren".

<u>Satz 2</u>: Sei $W \subset V$ ein Unter-VR.
Jede ONB $(w_1, \dots, w_m)$ von W läßt sich zu einer ONB $(w_1, \dots, w_m, w_{m+1}, \dots, w_n)$ von V ergänzen.

<u>Bew</u>: Falls $W = V$: fertig.
Ang. $W \neq V$.
Dann ex $v \in V$ mit $v \notin W$.
Sei $\tilde{v} = \langle w_1, v\rangle w_1 + \dots + \langle w_m, v\rangle w_m$

die orth. Projektion von v auf W.

Es gilt $w := v - \tilde{v} \in W^\perp$,

denn
$$\langle w_k, w\rangle = \langle w_k, v\rangle - \langle w_k, \tilde{v}\rangle$$
$$= \langle w_k, v\rangle - \langle w_k, v\rangle \underbrace{\langle w_k, w_k\rangle}_{=1} = 0$$

$\forall k = 1, \dots, m$.

$\left.\begin{array}{l} v \notin W \\ \tilde{v} \in W \end{array}\right\} \Rightarrow v \neq \tilde{v}$ $[v = \tilde{v} \Rightarrow w = 0]$

$\Rightarrow w \neq 0$

Setze $w_{m+1} = \frac{1}{\|w\|} w$.

$\Rightarrow (w_1, \dots, w_m, w_{m+1})$ ist Orthonormalsystem.

Ersetze W durch $\mathrm{Lin}(w_1, \dots, w_{m+1})$ und wiederhole das Verfahren.
Erhalte ONB von V. $\square$

Kor: Satz 1

Bew: Satz 2 mit $W = \{0\}$.

Bem 3: Im der Praxis ergänzt man $(w_1, \dots, w_m)$ zunächst zu Basis $(w_1, \dots, w_m, v_{m+1}, \dots, v_n)$ von V und beginnt mit $v = v_{m+1}$.

Kor 4: Ist $W \subset V$ Unter-VR, so gilt $V = W \oplus W^\perp$.
Insbesondere ist $\dim V = \dim W + \dim W^\perp$.

Bew: Übung

(4)

Def: Zwei euklidische VR $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ und $(W, [\cdot,\cdot])$ heißen isometrisch isomorph, falls es einen $\mathbb{R}$-VR Isomorphismus $\sigma: V \xrightarrow{\sim} W$ gibt mit

$$\langle a, b\rangle = [\sigma(a), \sigma(b)] \quad \forall a, b \in V.$$

Satz 5:
Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ eukl. VR der Dimension n. Dann ist $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ isometrisch isomorph zum $\mathbb{R}^n$ versehen mit dem Standardskalarprodukt.

Bew: Sei $(e_1, \dots, e_n)$ die Std-Basis des $\mathbb{R}^n$. Dies ist ONB bezgl dem Standardskalarprodukt.
Sei $(f_1, \dots, f_n)$ ONB von $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.
Sei $\sigma: \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} V$ der Iso, def durch

$$\sigma(e_i) = f_i$$

Dieser ist isometrisch. $\square$

Bem 6:
Sei V eukl VR und $f: V \to V$ Endomorphismus. Sei $(e_1, \dots, e_n)$ ONB von V und sei S die darstellende Matrix von f bezügl $e_1 \dots e_n$.
f ist selbstadj. $\iff$ S symmetrisch ist.

Bew: Nach Def ist

$$S = M_E^E(f) = (s_{ij}) \text{ mit}$$

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} s_{ij} e_i, \quad j=1,\dots,n$$

E ONB $\Rightarrow$ $s_{ij} = \langle e_i, f(e_j) \rangle$.

Andererseits ist

$$s_{ji} = \langle e_j, f(e_i) \rangle =$$

$$= \langle f(e_i), e_j \rangle$$

$$= \langle e_i, f(e_j) \rangle \quad \text{falls } f \text{ selbstadj.}$$

$\Rightarrow$ Beh. □

Kor 7:

Sei $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $f_S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto Sx$, die zug. lin Abb.

S ist symm $\Leftrightarrow$ f_S ist selbstadj. bezüg. Standardskalarprodukt.

[Bew: $S = M_{Std}^{Std}(f_S)$]

Kor 8:

Jede symmetrische reelle Matrix S hat einen reellen Eigenwert.

Bew: Fasse S als hermitesche Matrix auf. Die Eigenwerte von hermiteschen Matrizen sind reell □

Kor 9:
Jeder selbstadj. Endom. $f: V \to V$ eines euklidischen VR hat einen Eigenvektor $v \in V$ zu einem reellen Eigenwert λ.

Bew: Sei $E = (e_1, \dots, e_n)$ ONB von V,
$S = M_E^E(f)$.
Bem 6 $\Rightarrow$ $S = S^t$

Benutze

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & V \\ \mathbb{R}^n \arrow[u, "\sigma_E"] \arrow[r, "x \mapsto Sx"'] & \mathbb{R}^n \arrow[u, "\sigma_E"'] \end{tikzcd}$$

und Kor 8. $\square$

Satz 10 (Spektralsatz)
Sei V euklidischer VR und $f: V \to V$ selbstadj. Dann hat V eine ONB $e_1, \dots, e_n$ aus Eigenvektoren von f,

$$f(e_i) = \lambda_i e_i \qquad (\lambda_i \in \mathbb{R}).$$

Bew: Mit Kor 9 wie Satz 4, II, §7 für unitäre VR. $\square$

Def: Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt orthogonal, falls

$$A^t A = E_n.$$

Bem 11: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
Es sind äquivalent:
i) A orthogonal
ii) $A^{-1} = A^t$

iii) Die Zeilen von A bilden eine ONB des $\mathbb{R}^n$ mit Standard-Skalarprodukt

iv) Die Spalten.

Bew: Übung $\square$

Lem 12:

i) Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orth., so auch A^{-1}, A^t.

ii) Sind $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orth., so auch $A \cdot B$

Bew: Übung $\square$

Folgerung:

Die Menge

$$O(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ A \text{ orthogonal}\}$$

ist mit der Matrixmult. eine Untergruppe von $GL(n,\mathbb{R})$, die orthogonale Gruppe.

Satz 13:

Seien $E = (e_1, \ldots, e_n)$ eine ONB und $F = (f_1, \ldots, f_n)$ zwei ~~ONB~~ beliebige Basis des euklidischen $\mathbb{R}$'s V.
Sei $A = M_F^E(id_V)$ die Basiswechselmatrix von E nach F.
Genau dann ist auch F ONB, wenn A orthogonale Matrix ist.

Bew: (i) ⇔ (ii)
Nach Def der Basiswechselmatrix $A = (a_{ij})$ gilt

$$f_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i \quad (j = 1, \dots, n)$$

$$\mathcal{F} \text{ ONB} \iff \langle f_j, f_k \rangle = \delta_{jk} \quad \forall j, k$$

$$\iff \left\langle \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i , \sum_{i=1}^n a_{ik} e_i \right\rangle = \delta_{jk}$$

$$\iff \underbrace{\sum_{i=1}^n a_{ij} a_{ik}}_{jk\text{-Eintrag von } A^t \cdot A} = \delta_{jk}$$

$$\iff A^t \cdot A = E_n \qquad \square$$

<u>Satz 14</u> (Spektralsatz für symmetrische Matrizen)
Sei $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix. Dann ex eine orthogonale Matrix $A \in O(n, \mathbb{R})$, so daß

$$A^t S A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (\lambda_i \in \mathbb{R}).$$

Die λ_i sind die (reellen) Eigenwerte von S.

<u>Bew</u>: Wende Satz 10 an mit
$(V, \langle \, , \, \rangle) = (\mathbb{R}^n$, Standard-Skalarprod.$)$
$f = f_S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ selbstadj.
~~Sei Ba~~ $= (e_1, \dots, e_n)$ Standard Basis
$S = M_E^E(f_S)$.

Nach Satz 10 ex ONB $E'=(e_1',\dots,e_n')$ des $\mathbb{R}^n$ ~~so dass~~ aus Eigenvektoren von f_S, d.h.

$$f_S(e_i') = S\,e_i' = \lambda_i e_i' \quad (\lambda_i \in \mathbb{R}).$$

$$\Rightarrow \quad M_{E'}^{E'}(f_S) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Kap III, §5, ~~Satz 4~~ Kor 5 besagt

$$M_{E'}^{E'}(f_S) = \underbrace{M_{E}^{E'}(id_V)}_{}\,\underbrace{M_E^E(f_S)}_{S}\,\underbrace{M_{E'}^{E}(id_V)}_{A \text{ orthogonal nach Satz 13}}{}^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = A^{-1} S A \overset{\text{Satz 13, Bem 11 ii}}{=} A^t S A \qquad \square$$

Bem 15. Spektralsatz für hermitesche Matrizen (komplexe Version von Satz 14). Sei $H \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine hermitesche Matrix ($H = H^* = \bar{H}^t$). Dann ex eine unitäre Matrix U (d.h. $U^*U = E_n$), so dass

$$U^* H U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

(Vgl LA I, Kap V, §7 Bem 3.)

Nach 22 U unitär. Bemerke komplexe Version von Satz 13. (Übung.)

§2 Normale Endomorphismen

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlich dim. unitärer Vektorraum. $V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{C})$

($\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist $\mathbb{C}$ lin. im 2. Argument)

Jedes $a \in V$ definiert eine lineare Abbildung

$$(L =) L_a : V \longrightarrow \mathbb{C}, \quad x \longmapsto \langle a, x\rangle.$$

Wir erhalten eine $\mathbb{C}$-antilineare Abb $V \longrightarrow V^*$, $a \longmapsto L_a$.
Der folgende Satz zeigt, daß sie bijektiv ist.

Satz 1 (Riesz)
Sei $L : V \longrightarrow \mathbb{C}$ lin. Abb.
Es ex. ein eindeutig bestimmter Vektor $a \in V$, so daß

$$L(x) = L_a(x) = \langle a, x\rangle \quad \forall x \in V.$$

Bew: Existenz:
Sei $E = (e_1, \dots, e_n)$ eine ONB von V.
Sei

$$c_i = L(e_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Setze $a = \bar{c}_1 e_1 + \bar{c}_2 e_2 + \dots + \bar{c}_n e_n$
Dann gilt

$$L_a(e_j) = \langle a, e_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \bar{c}_i e_i, e_j\rangle = c_j = L(e_j)$$

$$\Rightarrow L_a = L.$$

Eindeutigkeit:

Seien $a, b \in V$ mit $L_a = L_b$

$\Rightarrow \langle a, x \rangle = \langle b, x \rangle \quad \forall x \in V$

$\Rightarrow \langle a-b, x \rangle = 0 \quad$ "

$(\Rightarrow a-b \in V^\perp = \{0\} \Rightarrow a = b)$

$\Rightarrow \langle a-b, a-b \rangle = 0$

$\Rightarrow a-b = 0 \quad \Rightarrow a = b \quad \square$

Satz:

Sei $f: V \to V$ ein Endomorphismus.

Es ex genau ein Endomorphismus

$f^*: V \to V$

mit der Eigenschaft

$\langle f(a), b \rangle = \langle a, f^*(b) \rangle \quad \forall a, b \in V.$

f^* heißt adjungierter Endomorphismus zu f

~~Bew: Existenz~~

~~Sei $e_1, \ldots, e_n$ eine Basis von V.~~

~~Zu e_i betrachten wir die lineare Abbildung~~

~~$\varphi_i: V \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto \langle e_i, f(x) \rangle$~~

~~Nach Satz 1 ex $y_i \in V$ mit~~

~~$\varphi_i(x) = \langle e_i, f(x) \rangle = \langle y_i, x \rangle \quad \forall x \in V.$~~

Bew: Existenz:

Sei $b \in V$. $\qquad \varphi_b = L_b \circ f$

Betrachte die lineare Abb

$$\varphi_b : V \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto \varphi_b(x) = \langle b, f(x) \rangle .$$

Nach Satz 1 ex genau ein $\overset{c(b)}{c} \in V$ mit $\varphi_b = L_c$, also

$$\langle b, f(x) \rangle = \langle c, x \rangle \quad \forall x \in V .$$

Definiere eine Abb $f^* : V \to V$ durch

$$f^*(b) := c$$

Dann gilt offenbar

$$\langle b, f(x) \rangle = \langle f^*(b), x \rangle \quad \forall b, x \in V .$$

Noch ZZ: f^* ist linear.

Sei $\lambda \in \mathbb{C}$, $b \in V$.

$f^*(\lambda b)$ hat die Eigenschaft

$$\begin{aligned}
\langle f^*(\lambda b), x \rangle &= \langle \lambda b, f(x) \rangle \\
&= \bar{\lambda} \langle b, f(x) \rangle \\
&= \bar{\lambda} \langle f^*(b), x \rangle \\
&= \langle \lambda f^*(b), x \rangle \quad \forall x \in V .
\end{aligned}$$

Eind. in Satz 1

$$\Rightarrow \quad f^*(\lambda b) = \lambda f^*(b) .$$

Seien $b, b' \in V$.

$$\begin{aligned}
\langle f^*(b+b'), x \rangle &= \langle b+b', f(x) \rangle \\
&= \langle b, f(x) \rangle + \langle b', f(x) \rangle \\
&= \langle f^*(b), x \rangle + \langle f^*(b'), x \rangle \\
&= \langle f^*(b) + f^*(b'), x \rangle \quad \forall x \in V
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad f^*(b+b') = f^*(b) + f^*(b') .$$

$\Rightarrow f^*$ ist linear.

<u>Eindeutigkeit</u>: Wie in Satz 1 $\square$

<u>Bem</u>: f ist selbstadjungiert, falls $f = f^*$.

<u>Bem 3</u>:
Sei $E = (e_1, \ldots, e_n)$ ONB von V und $f: V \to V$ Endomorphismus und $A = M_E^E(f)$ die darst. Matrix. Dann ist die darstellende Matrix von f^* genau

$$A^* := \bar{A}^t.$$

<u>Bew</u>: Es ist $A = (a_{ij})$ mit

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$$

$$\Rightarrow \quad a_{ij} = \langle e_i, f(e_j) \rangle$$

Genauso ist $A^* = (a^*_{ij})$ mit

$$a^*_{ij} = \langle e_i, f^*(e_j) \rangle$$

Damit gilt $a^*_{ij} = \overline{\langle f^*(e_j), e_i \rangle}$

$$= \overline{\langle e_j, f(e_i) \rangle}$$

$$= \overline{a_{ji}} \qquad \square$$

<u>Def</u>: Ein Endomorphismus von V heißt <u>normal</u>, falls f mit seinem Adjungierten vertauscht,

d.h.

$$f^* \circ f = f \circ f^*$$

Bsp: • Selbstadjungierte Endomorphismen.

• $f : V \to V$ heißt unitär, falls

$$\langle a, b \rangle = \langle f(a), f(b) \rangle \quad \forall a, b \in V.$$

(f ist also ein isometrischer Isomorphismus von V nach V)

In diesem Fall ist f invertierbar ~~$\langle f(a), b \rangle$~~, denn aus $f(a) = 0$ folgt

$$0 = \langle f(a), f(a) \rangle = \langle a, a \rangle \Rightarrow a = 0.$$

Weiterhin gilt $f^* = f^{-1}$, denn

$$\langle f(a), b \rangle = \langle f(a), f \circ f^{-1}(b) \rangle = \langle a, f^{-1}(b) \rangle.$$

$$\Rightarrow f^* \circ f = f \circ f^* = id_V.$$

Bem 4:

Ein Endom $f : V \to V$ ist unitär, genau dann wenn für die darst. Matrix U von f bzgl einer ONB von V gilt

$$U^* U = E_n.$$

Bew: Übung

(*)

<u>Satz 6</u> (Spektralsatz für normale End.)

Zu jedem normalen Endom $f: V \to V$ gibt es eine ONB ~~aus~~ von V aus Eigenvektoren von f.

<u>Bew</u>: Wie Spektralsatz für selbstadj. Endom.

Entscheidend:

- f hat einen Eigenvektor v, $f(v) = \lambda v$, $\|v\| = 1$ (klar, da wir über $\mathbb{C}$ arbeiten)
- Setze $W = v^\perp \subset V$

f bildet W auf sich selbst ab.

Sei $w \in W$. Es gilt

$\langle f(w), v \rangle = \langle w, f^*(v) \rangle = \underbrace{\bar{\lambda} \langle w, v \rangle}_{\text{L5}} = 0$.

$\Rightarrow f(w) \in W$.

(*) <u>Lemma 5</u>:

Sei $f: V \to V$ normal und $v \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $f(v) = \lambda v$.

Dann gilt $f^*(v) = \bar{\lambda} v$.

<u>Bew</u>: 1) Falls $\lambda = 0$, $f(v) = 0$

<u>ZZ</u> $f^*(v) = 0$

$0 = \langle f(v), f(v) \rangle = \langle f^* f(v), v \rangle = \langle f f^*(v), v \rangle$

$= \langle f^*(v), f^*(v) \rangle$

2) $\lambda \in \mathbb{C}$ bel. Ersetze f durch $g = f - \lambda \cdot id_V$

g ist normal. Benutze 1). $\square$