Funktionalanalysis
15. Übungsblatt (mit Lösungshinweisen)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Andreas Gärtner

Wintersemester 2012/2013
14./15. Februar 2013

Gruppenübung

Aufgabe G63 (Schwache Topologie und Norm-Topologie)
Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum.

(a) Zeigen Sie, dass jede schwach konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ beschränkt ist.

(b) Weisen Sie nach, dass die schwache Topologie gröber ist als die Normtopologie.

(c) Zeigen Sie: Ist $(E, \|\cdot\|)$ ein endlich dimensionaler Vektorraum, so ist die schwache Topologie gleich der Norm-Topologie.

(d) Zeigen Sie: Ist $(E, \|\cdot\|)$ ein unendlich dimensionaler Raum, so ist die schwache Topologie ungleich der Normtopologie. *Hinweis:* Zeigen Sie, dass jede Nullumgebung der schwachen Topologie lineare Teilräume enthält.

Lösungshinweise:

(a) Da die Funktionale $E' \ni y' \mapsto \langle x_n, y'\rangle$ punktweise konvergieren und damit beschränkt sind, ist nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit auch $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.

(b) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ mit $\lim_n \left\|x_n - x\right\| = 0$, dann gilt $\left|\langle x_n - x, y'\rangle\right| \leq \left\|x_n - x\right\| \, \left\|y'\right\| \longrightarrow 0$ für alle $y' \in E'$. Also ist $\mathrm{Id} : (E, \|\cdot\|) \to (E, \sigma(E, E'))$ stetig.

(c) Sei $(\delta_n)_{n=1}^m \subseteq E'$ eine Basis von E', dann wird die schwache Topologie von den Halbnormen $E \ni x \mapsto \left|\delta_n(x)\right|$ und damit auch von der Norm $E \ni x \mapsto \sum_{n=1}^m \left|\delta_n(x)\right|$ auf E erzeugt. Da $\dim E < \infty$ ist, ist diese Norm äquivalent zu $\|\cdot\|$.

(d) Jede Nullumgebung enthält ein Element

$$U_{\varphi_1,\dots,\varphi_n,\varepsilon} = \left\{x \in E : \left|\varphi_1(x)\right| < \varepsilon, \dots, \left|\varphi_n(x)\right| < \varepsilon\right\}$$

für $n \in \mathbb{N}$ mit $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in E'$ der Umgebungsbasis. Offensichtlich ist $\bigcap_{k\leq n} \ker \varphi_k \subseteq U_{\varphi_1,\dots,\varphi_n,\varepsilon}$. Als Schnitt endlich vieler Hyperebenen ist $\bigcap_{k\leq n} \ker \varphi_k$ ein linearer Teilraum.

Aufgabe G64 (Fouriertransformation auf Distributionen)
Für $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $\omega \in \mathbb{R}$, sei die Fouriertransformation definiert durch

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x)\,\mathrm{d}x \,.$$

Als Operator schreiben wir auch $\mathscr{F} : \mathscr{S}(\mathbb{R}) \ni f \mapsto \hat{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Weiter seien

$$Q := M_x : \mathscr{S}(\mathbb{R}) \ni f \mapsto x \cdot f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad P := \tfrac{1}{i} D : \mathscr{S}(\mathbb{R}) \ni f \mapsto \tfrac{1}{i} f' \in \mathscr{S}(\mathbb{R})\,.$$

Zeigen Sie:

(a) $\widehat{Pf} = Q\hat{f}$, also $\hat{f'}(\omega) = i\omega \hat{f}(\omega)$, und $\widehat{Qf} = -P\hat{f}$, also $\hat{f}' = -i(\widehat{xf})$.

(b) $\mathscr{F}(\mathscr{S}(\mathbb{R})) \subseteq \mathscr{S}(\mathbb{R})$.

(c) $\mathscr{F} : (\mathscr{S}(\mathbb{R}), \mathcal{P}) \to (\mathscr{S}(\mathbb{R}), \mathcal{P})$ ist stetig.

(d) Für $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ ist $\varphi_{\hat{f}}(g) = \int \hat{f} g = \int f \hat{g} = \varphi_f(\hat{g})$. Wie berechnet sich also die Fouriertransformation einer Distribution?

(e) Bestimmen Sie die Fouriertransformationen von δ_x und von $e^{i\omega t}$ (warum kann auch letztere nicht als klassische Fouriertransformation bestimmt werden?).

Lösungshinweise:

(a) Es gilt:

$$\sqrt{2\pi}\,\hat{f'}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{\infty} (-i\omega) e^{-i\omega x} f(x)\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}\,(i\omega)\hat{f}(\omega)\,,$$

$$\sqrt{2\pi}\,\hat{f}'(\omega) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} (-ix) e^{-i\omega x} f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= -i \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \big(x f(x)\big)\,\mathrm{d}x = -i\sqrt{2\pi}\,(\widehat{xf})(\omega)\,.$$

(b) Für $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ sind $P^n f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ und $Q^n f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ und nach Teil (a) gilt:

$$x^n D^m \hat{f} = x^n i^m P^m \hat{f} = x^n i^m (-1)^m \widehat{Q^m f} = i^m (-1)^m Q^n \widehat{Q^m f} = i^m (-1)^m \widehat{P^n Q^m f}\,.$$

Da $\left\|\hat{g}\right\|_\infty \le \left\|g\right\|_1 < \infty$ ist für $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, folgt $\hat{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.

(c) Sei $(f_j)_{j \in J} \subseteq \mathscr{S}(\mathbb{R})$ ein Netz mit $\mathcal{P}$-$\lim_j f_j = 0$. D.h. für alle $n, m \in \mathbb{N}$ ist $\lim_j p_{n,m}(f_j) = 0$, woraus $\lim_j p_{n,m}(x^k f_j) = 0$ und offensichtlich auch $\lim_j p_{n,m}(D^l x^k f_j) = 0$ folgt $(k, l \in \mathbb{N})$. Also ist ebenfalls $\|\cdot\|_1$-$\lim_j (D^l(x^k f_j)) = 0$ und wir erhalten

$$\lim_j p_{n,m}(\widehat{f_j}) = \lim_j \left\|x^n D^m \widehat{f_j}\right\|_\infty = \lim_j \left\|\widehat{P^n Q^m f_j}\right\|_\infty = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_j \sup_\omega \left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} P^n Q^m f_j(x)\,\mathrm{d}x\right|$$
$$\le \lim_j \int_{-\infty}^{\infty} \left|P^n Q^m f_j(x)\right|\,\mathrm{d}x = \lim_j \int_{-\infty}^{\infty} \left|i^{-n} D^n\big(x^m f_j(x)\big)\right|\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

(d) Die Fouriertransformierte von $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})'$ ist durch $\widehat{\varphi} : \mathscr{S}(\mathbb{R}) \ni g \mapsto \varphi(\hat{g})$ gegeben – nach Teil (c) liegt $\widehat{\varphi}$ auch wieder in $\mathscr{S}(\mathbb{R})'$.

(e) Sei $h(t) = e^{i\omega t}$. Wir erhalten für $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$:

$$\hat{\delta}_x(g) = \delta_x(\hat{g}) = \hat{g}(x) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} g(t)\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\varphi_f(g) \quad \text{mit} \quad f(t) = e^{-ixt}\,,$$

$$\widehat{\varphi_h}(g) = \varphi_h(\hat{g}) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,\hat{g}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}\,\hat{g}(x)\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}\,g(\omega) = \sqrt{2\pi}\,\delta_\omega(g)\,.$$

Die klassische Fouriertransformation von h ist nicht definiert: $\hat{h}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} e^{i\omega t}\,\mathrm{d}t\,.$

Aufgabe G65 (Der Satz von Krein-Milman und die Semesterabschluss-Pizza)
Seien $E := \big(L^\infty_{\mathbb{R}}([0,1],\lambda), ||\cdot||_\infty\big)$ der Raum der reellen Funktionen in L^∞ und $f_1,\dots,f_n$ reelle Funktionen in $\big(L^1([0,1],\lambda), ||\cdot||_1\big)$. Betrachten Sie den Operator

$$T : E \to \mathbb{R}^n : g \mapsto \left(\int_0^1 g\cdot f_1\,d\lambda,\ \dots,\ \int_0^1 g\cdot f_n\,d\lambda\right).$$

Sei $\mathcal{P} := \left\{f \in E : \left\|f\right\|_\infty \le 1, f \ge 0\right\}$ (vgl. Aufgabe G60(c)). Zeigen Sie:

(a) $T(\mathcal{P}) \subseteq \mathbb{R}^n$ ist kompakt und konvex.

(b) Ist p irgendein Punkt in $T(\mathcal{P})$ (also nicht notwendig ein Extremalpunkt), dann existiert ein Extremalpunkt e von $\mathcal{P}$ mit $T(e) = p$ (das ist natürlich eine sehr ungewöhnliche Situation!). Zeigen Sie dazu:

  (i) $\mathcal{P}_p := \{g \in \mathcal{P} : T(g) = p\}$ ist $\sigma(L^\infty, L^1)$-kompakt und konvex, besitzt also Extremalpunkte.

  (ii) Ist e_p ein Extremalpunkt von $\mathcal{P}_p$, so ist e_p ein Extremalpunkt von $\mathcal{P}$.
  Hinweis: Ist $e_p \in \mathcal{P}_p$ kein Extremalpunkt von $\mathcal{P}$, dann existiert nach Aufgabe G60(c) zu einem $\varepsilon > 0$ eine messbare Menge $A \subseteq [0,1]$ mit Lebesguemaß echt größer als 0 und $\varepsilon \le e_p(t) \le 1-\varepsilon$ für $t \in A$. Da $L^\infty(A) := \{f \in L^\infty_{\mathbb{R}}([0,1]) : f(t) = 0\ \forall\, t \notin A\}$ unendlich dimensional ist, gibt es $0 \ne g_\varepsilon \in L^\infty(A)$ mit $T(g_\varepsilon) = 0$ und $||g_\varepsilon||_\infty < \varepsilon$ (Warum?).

(c) Die Menge $\left\{\left(\int_A f_1\,d\lambda, \dots, \int_A f_n\,d\lambda\right) \in \mathbb{R}^n : A \subseteq [0,1] \text{ messbar}\right\}$ ist kompakt und konvex (Satz von Lyapunov).
Bemerkung: Wenn Sie die Argumente nochmal durchgehen, sehen Sie, dass der Satz von Lyapunov noch genauso gilt, wenn Sie den Maßraum $([0,1],\lambda)$ durch einen beliebigen endlichen Maßraum (Ω,μ) ersetzen, in welchem das Maß μ keine „Atome" hat, d. h., für jede messbare Menge $A \subseteq \Omega$ gibt es eine messbare Teilmenge $B \subseteq A$ mit $\mu(B) = \frac{1}{2}\mu(A)$.

(d) Ist $f_i \ge 0$ mit $\int_0^1 f_i\,d\lambda = 1$ für $1 \le i \le n$, dann gibt es für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung von $[0,1]$ in paarweise disjunkte messbare Mengen $A_1,\dots,A_k$ so dass $\int_{A_j} f_i\,d\lambda = \frac{1}{k}$ ist für $1 \le i \le n, 1 \le j \le k$.
Hinweis: Offenbar ist $T(\mathbb{1}) = (1,\dots,1) \in \mathbb{R}^n$ und $T(0) = 0 \in \mathbb{R}^n$. Folgern Sie aus (c), dass es eine messbare Menge $A_1 \subseteq [0,1]$ gibt mit $T(\chi_{A_1}) = (\frac{1}{k},\dots,\frac{1}{k}) \in \mathbb{R}^n$ (wie üblich bezeichnet χ_A die charakteristische Funktion von A). Benutzen Sie nun die in der Bemerkung formulierte leichte Verallgemeinerung des Satzes von Lyapunov und vollständige Induktion.

(e) Zur Feier des Semesterabschlusses backen Sie eine große runde Pizza mit n Belägen. Zeigen Sie, dass Sie diese Pizza gerecht auf k Personen aufteilen können, d. h., jede Person erhält ein Stück der Pizza, auf welchem sich von jedem der n Beläge genau $\frac{1}{k}$ befindet.
Hinweis: Führen Sie auf der Pizza Polarkoordinaten ein und legen Sie keine Oliven mit Kernen auf die Pizza: Dann können Sie annehmen, dass es für den i-ten Belag eine Funktion $f_i \in L^1([0,1])$ gibt mit $f_i \ge 0$ und $\int_0^1 f_i d\lambda = 1$, so dass sich auf dem Pizzastück $\left\{(r,\phi) : 0 \le r \le R \gg 0, \frac{\phi}{2\pi} \in A \subseteq [0,1]\right\}$ vom i-ten Belag der Anteil $\int_A f_i\,d\lambda$ befindet.

Nach dieser nahrhaften Anwendung der Funktionalanalysis bedanken wir uns für Ihre Mitarbeit und wünschen Ihnen eine gute vorlesungsfreie Zeit!

Lösungshinweise:

(a) Nach Aufgabe G60(c) ist $\mathcal{P}$ konvex und $\sigma(L^\infty, L^1)$-kompakt. Da T offensichtlich linear und $\sigma(L^\infty, L^1)$-$\|\cdot\|$-stetig ist, ist auch $T(\mathcal{P})$ konvex und kompakt.

(b) Die Konvexität rechnet man leicht nach (T ist linear) und dass $\mathcal{P}_p = \mathcal{P} \cap T^{-1}(\{p\}) \subseteq \mathcal{P}$ abgeschlossen und damit kompakt bzgl. $\sigma(L^\infty, L^1)$ ist folgt aus der Stetigkeit von T.

Für (ii) betrachten wir einen Extremalpunkt $e_p \in \operatorname{ext}\mathcal{P}_p$ und nehmen an, dass $e_p \notin \operatorname{ext}\mathcal{P}$ ist. Sei g_ε definiert wie im Hinweis, dann ist offensichtlich $e_p \pm g_\varepsilon \in \mathcal{P}$ und

$$T(e_p \pm g_\varepsilon) = T(e_p) \pm T(g_\varepsilon) = T(e_p) \pm 0 = p\,.$$

Also ist $e_p = \frac{1}{2}(e_p + g_\varepsilon) + \frac{1}{2}(e_p - g_\varepsilon)$ eine echte Konvexkombination von Elementen aus $\mathcal{P}_p$ im Widerspruch zur Annahme. Wir erhalten, dass $e_p \in \operatorname{ext}\mathcal{P}$ ist mit $T(e_p) = p$.

(c) Die Extremalpunkte von $\mathcal{P}$ sind durch die charakteristischen Funktionen χ_A mit $A \subseteq [0,1]$ gegeben. Nach Teil (b) gilt daher $\left\{ \left(\int_A f_1\, d\lambda, \ldots, \int_A f_n\, d\lambda \right) \in \mathbb{R}^n : A \subseteq [0,1] \text{ messbar} \right\} = T(\mathcal{P})$ und nach Teil (a) ist $T(\mathcal{P})$ kompakt und konvex.

(d) Für $k = 1$ folgt die Behauptung direkt aus den Voraussetzungen.

Sei $k \geq 2$ und $A_1, \ldots, A_{k-1} \subseteq [0,1]$ paarweise disjunkt, so dass $T(\chi_{A_j}) = (\frac{1}{k-1}, \ldots, \frac{1}{k-1})$ ist für $1 \leq j \leq (k-1)$. Für jedes solche j wenden wir nun den Satz von Lyapunov auf den Maßraum (A_j, λ) an. Damit gibt es jeweils ein $\tilde{A}_j \subseteq A_j$, so dass gilt:

$$\left(\int_{\tilde{A}_j} f_1\, d\lambda, \ldots, \int_{\tilde{A}_j} f_n\, d\lambda \right) = T_j(\chi_{\tilde{A}_j}) = \tfrac{k-1}{k} T_j(\mathbb{1}) + \left(1 - \tfrac{k-1}{k}\right) T_j(0) = \tfrac{k-1}{k} T(\chi_{A_j}) = \left(\tfrac{1}{k}, \ldots, \tfrac{1}{k}\right),$$

wobei $T_j : (L^\infty_{\mathbb{R}}(A_j, \lambda), \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}^n$ entsprechend definiert ist. Weiter gilt für $1 \leq i \leq n$:

$$\int_{[0,1] \setminus \bigcup_j \tilde{A}_j} f_i\, \mathrm{d}\lambda = \int_0^1 f_i\, \mathrm{d}\lambda - \int_{\bigcup_j \tilde{A}_j} f_i\, \mathrm{d}\lambda = 1 - \sum_{j=1}^{k-1} \tfrac{1}{k} = \tfrac{k-(k-1)}{k} = \tfrac{1}{k}\,.$$

Setzen wir $\tilde{A}_k := [0,1] \setminus \bigcup_j \tilde{A}_j$ haben wir die gewünschte Zerlegung von $[0,1]$ gefunden.

(e) Wenden Sie Teil (d) an.