Funktionalanalysis
14. Übungsblatt (mit Lösungshinweisen)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Andreas Gärtner

Wintersemester 2012/2013
07./08. Februar 2013

Gruppenübung

Aufgabe G59 (Separierende Teilräume von E')
Sei $(E, \|\cdot\|)$ normiert und $F' \subseteq E'$ ein linearer Teilraum. Zeigen Sie: F' ist separierend für E genau dann, wenn F' σ^*-dicht in E' ist.
Hinweis: Umgeben Sie einen Punkt im Komplement des σ^*- Abschlusses von F' mit einer geeigneten konvexen Menge und wenden Sie Satz 11.6 der Vorlesung an.

Lösungshinweise: Sei F' σ^*-dicht in E' und $x \in E$. Dann existiert ein $\varphi \in E'$ mit $\varphi(x) \neq 0$ und ein Netz $(\varphi_i)_{i \in I} \subseteq F'$, so dass σ^*-$\lim_i \varphi_i = \varphi$ ist. Also ist insbesondere $\lim_i \varphi_i(x) = \varphi(x) \neq 0$ und es gibt ein $i_0 \in I$, so dass $\varphi_i(x) \neq 0$ für $i \geq i_0$. Damit ist F' separierend für E.

Sei F' nicht σ^*-dicht in E' und $\overline{F'}$ der σ^*-Abschluss von F. Dann ist $\overline{F'} \neq E'$ und $E' \setminus \overline{F'}$ σ^*-offen. Für $\psi \in E' \setminus \overline{F'}$ gibt es also eine offene, konvexe Umgebung $U \subseteq E' \setminus \overline{F'}$, d.h. $U \cap \overline{F'} = \emptyset$.
Mit dem Trennungssatz für offene Mengen in lokalkonvexen Vektorräumen existieren daher ein $0 \neq x \in (E', \sigma^*)' = E$ und ein $t \in \mathbb{R}$, so dass für alle $\psi \in U$ und alle $\varphi \in \overline{F'}$ gilt:

$$\Re\langle x, \psi \rangle < t \leq \Re\langle x, \varphi \rangle = \Re\varphi(x) .$$

Da $\overline{F'}$ ein linearer Teilraum ist, folgt $\varphi(x) = 0$ für alle $\varphi \in \overline{F'}$, d.h. F' ist nicht separierend.

Aufgabe G60 (Extremalpunkte)

(a) Bestimmen Sie die Extremalpunkte
   (i) der Einheitskugel von $(c_0(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$.
   (ii) der Einheitskugel von $(L^1([0,1], \lambda), \|\cdot\|_1)$ (λ das Lebesguemaß auf $[0,1]$).
   (iii) der Einheitskugel von $(L^\infty([0,1], \lambda), \|\cdot\|_\infty)$.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von Teil (a): Die Räume $(c_0(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$ und $(L^1([0,1], \lambda), \|\cdot\|_1)$ besitzen keinen Prädual. (Ein normierter Raum F heißt Prädual eines Banachraumes E, falls F' isometrisch isomorph ist zu E.)

(c) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{P} := \{f \in (L^\infty([0,1], \lambda), \|\cdot\|_\infty) : \|f\|_\infty \leq 1,\ f \geq 0\}$ $\sigma(L^\infty, L^1)$-kompakt und konvex ist. Bestimmen Sie die Extremalpunkte von $\mathcal{P}$.

Lösungshinweise:

(a) Für einen Banachraum E sei $\operatorname{ext}\overline{E_1}$ die Menge der Extremalpunkte der Einheitskugel.

E	$\operatorname{ext}\overline{E_1}$	Bemerkung
$(c_0(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$	$\operatorname{ext}\overline{E_1} = \emptyset$	für $x \in \overline{E_1}$ existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $\lvert x_n\rvert \le \frac{1}{2}$ für $n \ge N$ $\Longrightarrow$ $x = \frac{1}{2}x\vert_{[1,N]} + \frac{1}{2}(x\vert_{[1,N]} + 2x\vert_{[N+1,\infty)})$
$(L^1([0,1]), \|\cdot\|_1)$	$\operatorname{ext}\overline{E_1} = \emptyset$	für $f \in \overline{E_1}$ sei $A \subseteq [0,1]$ mit $\lVert f\vert_A\rVert_1 = \lambda > 0$ $\Longrightarrow$ $f = \lambda(\frac{1}{\lambda}f\vert_A) + (1-\lambda)(\frac{1}{1-\lambda}f\vert_{A^\complement})$
$(L^\infty([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$	$\operatorname{ext}\overline{E_1} = \left\{f \in \overline{E_1} : \lvert f(x)\rvert = 1 \text{ für fast alle } x \in [0,1]\right\}$	

(b) Hat E einen Prädual F, dann ist $\overline{E_1}$ $\sigma(E,F)$-kompakt und hat damit Extremalpunkte.

(c) Die Einheitskugel von $E := L^\infty([0,1],\lambda)$ ist nach Alaoglu $\sigma(L^\infty, L^1)$-kompakt. Da die Konvexität offensichtlich ist, genügt es zu zeigen, dass $\mathcal{P} \subseteq \overline{E_1}$ $\sigma(L^\infty, L^1)$-abgeschlossen ist:

Nehmen wir an, $\mathcal{P}$ ist nicht abgeschlossen. Dann existieren $f \in \overline{E_1} \setminus \mathcal{P}$ und $(f_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{P}$ mit $\lim_i \langle f_i, g\rangle = \langle f, g\rangle$ für alle $g \in L^1([0,1])$. Aus $f \notin \mathcal{P}$ folgt, dass es eine Menge $A \subseteq [0,1]$ mit $\lambda(A) > 0$ gibt, so dass $f(A) \notin [0,1]$ ist. Damit ist $\langle f, \chi_{\tilde{A}}\rangle \notin [0,1]$ für ein $\tilde{A} \subseteq A$ mit $\lambda(\tilde{A}) > 0$. Da aber $\langle f_i, \chi_{\tilde{A}}\rangle \in [0,1]$ ist, existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $\left|\langle f - f_i, \chi_{\tilde{A}}\rangle\right| \ge \varepsilon$ für alle $i \in I$ gilt – im Widerspruch zur Konvergenz von $(f_i)_{i\in I}$ gegen f.

Die Extremalpunkte von $\mathcal{P}$ sind die charakteristischen Funktionen χ_A mit $A \subseteq [0,1]$.

Aufgabe G61 (Schwache Operatortopologie)
Seien E und F normierte Räume. Zeigen Sie:

(a) Für $x \in E$ und $y' \in F'$ ist $\omega_{x,y'} : \mathscr{L}(E,F) \ni T \mapsto \langle Tx, y'\rangle \in \mathbb{K}$ ein stetiges lineares Funktional auf $(\mathscr{L}(E,F), \|\cdot\|_{\mathrm{Op}})$.

(b) Sei $G \subseteq \mathscr{L}(E,F)'$ die lineare Hülle dieser linearen Funktionale, dann ist G eine separierende Familie von linearen Funktionalen und $\sigma(\mathscr{L}(E,F), G)$ ist die schwache Operatortopologie (swop) auf $\mathscr{L}(E,F)$.

(c) Bestimmen Sie den Dual von $(\mathscr{L}(E,F), \mathrm{swop})$.

Bemerkungen:

1.) Die Linearform $\omega_{x,y'}$ kann man auch mit dem elementaren Tensor $x \otimes y'$ und G mit dem (algebraischen) Tensorprodukt $E \otimes F'$ identifizieren.

2.) In der statistischen Mechanik und in der Quantenfeldtheorie sind die Observable eines quantenmechanischen Systems durch eine *-Algebra von Operatoren auf einem Hilbertraum gegeben, die abgeschlossen ist in der schwachen Operatortopologie (äquivalenterweise in der starken Operatortopologie). Solche Operator-Algebren nennt man heute *von Neumann-Algebren*.

Lösungshinweise:

(a) Für $x \in E$ und $y' \in F'$ gilt:

$$\left|\langle Tx, y'\rangle\right| \le \|Tx\| \left\|y'\right\| \le \|T\|_{\mathrm{Op}} \|x\| \left\|y'\right\| .$$

Also ist $\omega_{x,y'}$ beschränkt.

(b) G ist eine separierende Familie von linearen Funktionalen:

Aus $\langle Tx, y'\rangle = 0$ für alle $y' \in F'$ folgt $Tx = 0$ und ist $Tx = 0$ für alle $x \in E$, so ist $T = 0$.

Die $\sigma(\mathscr{L}(E,F), G)$-Topologie stimmt mit der swop-Topologie überein:

Sei $(T_i)_{i\in I}$ swop-konvergent gegen 0 und $\varepsilon > 0$, sowie $g := \sum_{k=1}^n \omega_{x_k,y'_k} \in G$. Dann existiert für jedes $1 \le k \le n$ ein $i_k \in I$, so dass $\left|\langle T_i x_k, y'_k\rangle\right| < \frac{\varepsilon}{n}$ für alle $i \ge i_k$. Sei $i_0 \ge i_k$ für $1 \le k \le n$, dann ist $\left|g(T_i)\right| \le \sum_{k=1}^n \left|\langle T_i x_k, y'_k\rangle\right| < \varepsilon$ für alle $i \ge i_0$, d.h. $\sigma(\mathscr{L}(E,F),G)\text{-}\lim_i T_i = 0$. Dass die $\sigma(\mathscr{L}(E,F),G)$-Topologie feiner als die swop-Topologie ist, ist klar.

(c) Mit (a) und (b) gilt:

$$\big(\mathscr{L}(E,F),\mathrm{swop}\big)' = \big(\mathscr{L}(E,F),\sigma(\mathscr{L}(E,F),G)\big)' = G\ .$$

Aufgabe G62 (Schwacher Abschluss der Einheitssphäre)
Sei $(E,\|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Zeigen Sie:
Die Einheitssphäre $S := \{x \in E\ :\ \|x\| = 1\}$ liegt $\sigma(E,E')$-dicht in der abgeschlossenen Einheitskugel $\overline{E_1} := \{x \in E\ :\ \|x\| \le 1\}$ genau dann, wenn E unendlich dimensional ist.
Hinweis: Nutzen Sie Hahn-Banach und Ihr Wissen aus Aufgabe G58 und zeigen Sie per Widerspruch, dass der schwache Abschluss von S eine Teilmenge von $\overline{E_1}$ ist. Ein Element x liegt im Abschluss von S, wenn jeder Schnitt einer Umgebung von x mit S nicht leer ist.

Lösungshinweise: Ist E endlich dimensional, dann stimmen nach Aufgabe G58(c) die Norm-Topologie und die schwache Topologie überein, d.h. S ist schwach abgeschlossen aber $0 \notin S$.

Sei E unendlich dimensional, $x \in E$ mit $\|x\| > 1$ und $(x_i)_{i\in I} \subseteq S$ mit $\sigma\text{-}\lim_i x_i = x$. Dann gilt $\lim_i \varphi(x_i) = \varphi(x)$ für jedes $\varphi \in E'$, also insbesondere für $\varphi \in E'$ mit $\varphi(x) = \|x\| > 1$ und $\left\|\varphi\right\| = 1$. Das führt aber zu einem Widerspruch:

$$1 = \left\|\varphi\right\|\,\left\|x_i\right\| \ge \varphi(x_i) \xrightarrow{i\in I} \varphi(x) = \|x\| > 1\ .$$

Sei $x \in \overline{E_1} \setminus S$. Nach Aufgabe G58(d) enthält jede schwache Nullumgebung und damit jede schwache Umgebung von x affine Teilräume – also insbesondere Elemente aus S. Also liegt x im schwachen Abschluss von S.

Hausübung

Aufgabe H38 (Reflexivität und schwache Topologien) (1 Punkt)
Sei $(E,||\cdot||)$ ein normiert Raum. Zeigen Sie:

(a) $B := \{\hat{x} : x \in E, ||x|| \le 1\}$ ist $\sigma(E'',E')$-dicht in der Einheitskugel von E''.
Hinweis: Wenden Sie 11.6 der Vorlesung geeignet an.

(b) Ist E ein Banachraum, dann sind folgene Aussagen äquivalent:
  (i) E ist reflexiv.
  (ii) E' ist reflexiv.
  (iii) Die Topologien $\sigma(E',E)$ und $\sigma(E',E'')$ stimmen überein.
  (iv) Die Einheitskugel $E_1 := \{x \in E\ :\ \|x\| \le 1\}$ ist schwach kompakt.
  Hinweise: Die Einschränkung von $\sigma(E'',E')$ auf E stimmt mit $\sigma(E,E')$ überein. Zeigen Sie zunächst (iv) $\Rightarrow$ (i), dann können Sie diese Implikation nutzen um (iii) $\Rightarrow$ (ii) zu zeigen. Nutzen Sie Satz 11.8 der Vorlesung und Teil (a) um die Implikation (ii) $\Rightarrow$ (i) zu zeigen.

Lösungshinweise:

(a) Angenommen B sei nicht $\sigma(E'', E')$-dicht in der Einheitskugel $(E'')_1$ von E''. Dann gibt es ein $x \in (E'')_1 \setminus B$ und eine offene, konvexe Umgebung $U \subseteq (E'')_1$ von x mit $U \cap B = \emptyset$. Wie in Aufgabe G59 gibt es dann ein lineares Funktional $\psi \in \big(E'', \sigma(E'', E')\big)' = E'$ und ein $t \in \mathbb{R}$, so dass gilt (multipliziere 11.6 mit (-1) und gehe zu $-\psi$ bzw. $-t$ über):

$$\Re\psi(U) > t \geq \Re\psi(B)\,.$$

Sei $\varepsilon > 0$, dann gibt es ein $y \in B$, so dass $\psi(y) = \big\|\psi\big\| - \varepsilon$ ist. Wir erhalten für $x \in U$:

$$\big\|\psi\big\| - \varepsilon = \psi(y) \leq t < \Re\psi(x) \leq \big|\psi(x)\big| \leq \big\|\psi\big\|\ \|x\|\ ;$$

ein Widerspruch, da $\|x\| \leq 1$ ist und $\varepsilon > 0$ beliebig war.

(b) Wir identifizieren Teilmengen eines Banachraums mit ihren kanonischen Einbettungen in dessen Bidual. So impliziert (i) beispielsweise $E = E''$, und (i) $\Rightarrow$ (iii) ist klar.

(iv) $\Rightarrow$ (i): Aus (iv) folgt, dass $E_1 \subseteq E''$ abgeschlossen bzgl. $\sigma(E, E')$ und mit dem Hinweis bzgl. $\sigma(E'', E')$ in $(E'')_1$ ist. Nach Teil (a) ist E_1 aber auch $\sigma(E'', E')$-dicht in $(E'')_1$. Damit ist $E_1 = (E'')_1$ und E reflexiv.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Nach Alaoglu ist $(E')_1$ kompakt bzgl $\sigma(E', E) = \sigma(E', E'')$, d.h. $(E')_1$ ist schwach kompakt. Wie gerade gezeigt, folgt daraus, dass E' reflexiv ist.

(ii) $\Rightarrow$ (i): E_1 ist konvex und Norm-abgeschlossen in E''. Da $(E'', \|\cdot\|)' = \big(E'', \sigma(E'', E''')\big)'$ ist, folgt aus Satz 11.8 und der Voraussetzung, dass E_1 abgeschlossen ist bzgl. $\sigma(E'', E')$. Mit Teil (a) folgt wieder $E_1 = (E'')_1$ und die Reflexivität von E.

(i) $\Rightarrow$ (iv): Nach Alaoglu ist $E_1 = (E'')_1$ kompakt bzgl. $\sigma(E'', E') = \sigma(E, E')$.

Aufgabe H39 (Schwerpunkte von W'Maßen auf kompakten konvexen Mengen) (1 Punkt)
Sei K eine kompakte konvexe Menge nichtleere Teilmenge eines lokalkonvexen Vektorraumes $(E, \mathcal{P})$ und $A(K)$ die Menge der stetigen affinen Funktionen auf K. Zeigen Sie:

(a) $A(K)$, versehen mit der Supremumsnorm, ist ein Banachraum.

(b) Für $p \in K$ sei, wie üblich, $\delta_p : A(K) \ni f \mapsto f(p) \in \mathbb{K}$ (wir betrachten δ_p aber jetzt nur auf den affinen Funktionen!), dann ist $\hat{K} := \{\delta_p : p \in K\} \subseteq A(K)'$ konvex.

(c) $\hat{K} \subseteq A(K)'$ ist σ^*-kompakt.
Hinweis: Betrachten Sie z.B. die Abbildung $K \ni p \mapsto \delta_p \in A(K)'$.

(d) Sei $f' \in A(K)'$ mit $f'(\mathbb{1}) = 1 = ||f'||$, dann gibt es ein $p \in K$ mit $f' = \delta_p$.
Hinweis: Falls nicht, trennen Sie f' von $\hat{K}$ und führen dies mit $f' \geq 0$ zum Widerspruch.

(e) Sei μ ein (reguläres Borel-)Wahrscheinlichkeitsmaß auf K, dann existiert genau ein Punkt $p \in K$ mit $f(p) = \int_K f(p)d\mu(p)$ für alle $f \in A(K)$.

Bemerkungen:

1.) Zur Veranschaulichung betrachten Sie ruhig auch niederdimensionale konvexe Mengen K. Der Punkt p heißt auch der Schwerpunkt des Wahrscheinlichkeitsmaßes μ. Machen Sie sich klar, dass diese Bezeichnung sinnvoll ist.

2.) Natürlich gibt es viele Wahrscheinlichkeitsmaße mit demselben Schwerpunkt p. Ist ein solches Wahrscheinlichkeitsmaß auf endlich vielen Punkten $q_1, \ldots, q_n$ konzentriert, so heißt das nur, dass man p als Konvexkombination der Punkte $q_1, \ldots, q_n$ schreiben kann.

3.) Die *Choquet-Theorie* versucht nun, solche Wahrscheinlichkeitsmaße zu konstruieren, die auf den Extremalpunkten von K konzentriert sind. Im wesentlichen geht das immer. Diese Theorie hat wiederum viele Anwendungen in der Mathematik und der mathematischen Physik – ob man nun Gruppendarstellungen in irreduzible Darstellungen zerlegt oder quantenmechanische Zustände in reine Zustände; auch Greensfunktionen kann man aus diesem Blickwinkel verstehen und vieles mehr.

4.) In der Quantenmechanik bilden die Zustände eine konvexe Menge (in Verallgemeinerung der konvexen Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße), ihre Extremalpunkte heißen *reine Zustände*. In den letzten Jahren besteht ein großer Teil der Probleme der Quanteninformationstheorie darin, für geeignete konvexe Mengen von Zuständen (meist auf zusammengesetzten Systemen) die Extremalpunkte zu bestimmen und zu entscheiden, ob ein vorgegebener Zustand in dieser Menge liegt oder nicht, oft durch Trennung mittels geeigneter linearer Funktionale bzw. Hyperebenen. Die meisten wichtigen Fragen sind aber noch ungelöst.

Lösungshinweise:

(a) Man rechnet leicht nach, dass $A(K)$ ein abgeschlossener Teilraum des Banachraums der stetigen Funktionen $(\mathcal{C}(K), \|\cdot\|)$ ist.

(b) Nachrechnen.

(c) Wir zeigen, dass $\hat{K}$ σ^*-abgeschlossen in $(A(K)')_1$ ist. Sei $(\delta_{p_i})_{i\in I} \subseteq \hat{K}$ ein Netz mit $\sigma^*\text{-}\lim_i \delta_{p_i} = g' \in A(K)'$. Da die Abbildung $K \ni p \mapsto \delta_p \in A(K)'$ stetig und injektiv ist, erhalten wir ein Netz $(p_i)_{i\in I} \subseteq K$, welches ein konvergentes Teilnetz $(p_{i_j})_{j\in J} \subseteq K$ besitzen muss (K ist kompakt). Sei $p_0 := \lim_j p_{i_j}$ der Grenzwert dieses Teilnetzes. Da jedes $f \in A(K)$ stetig ist, folgt:

$$f(p_0) = \lim_j f(p_{i_j}) = \lim_j \delta_{p_{i_j}}(f) = g'(f)\,,$$

d.h. $g' = \delta_{p_0} \in \hat{K}$.

(d) Wir nehmen an, dass $f' \notin \hat{K}$ ist. Dann ist $\{f'\} \subseteq \hat{K}$ eine konvexe σ^*-kompakte Menge und nach Teil (b) und (c) ist $\hat{K}$ ebenfalls konvex und σ^*-kompakt. Nach dem Trennungssatz für kompakte konvexe Mengen, existiert daher ein $g \in \left(A(K)', \sigma^*\right)' = A(K)$ und ein $t \in \mathbb{R}$, so dass für alle $\delta_p \in \hat{K}$ gilt:

$$\Re g(p) = \Re \delta_p(g) = \Re\langle g, \delta_p\rangle < t < \Re\langle g, f'\rangle = \Re f'(g)\,.$$

Aus $f'(\mathbb{1}) = 1 = ||f'||$ folgt, dass f' positiv ist (vgl. Aufgabe H33). Also gilt für alle $p \in K$:

$$\alpha := \sup_{p\in K} \Re g(p) < t < \Re f'(g) = f'(\Re g) \le f'(\alpha\mathbb{1}) = \alpha\,,$$

da aus $\alpha\mathbb{1} - g \ge 0$ auch $f'(\alpha\mathbb{1} - g) \ge 0$ folgt.

(e) Sei $g' : A(K) \ni f \mapsto \int_K f(p)d\mu(p)$. Dann ist $g'(\mathbb{1}) = 1 = \left\|g'\right\|$ und die Behauptung folgt aus Teil (d).