Funktionalanalysis
13. Übungsblatt (mit Lösungshinweisen)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Andreas Gärtner

Wintersemester 2012/2013
31. Jan. / 02. Feb. 2013

Gruppenübung

Aufgabe G55 (Offen impliziert absorbierend)
Sei $(E,\mathcal{P})$ ein lokalkonvexer Vektorraum. Zeigen Sie: Ist $U \subseteq E$ offen mit $0 \in U$, so ist U absorbierend.

Lösungshinweise: Die Mengen $U_{p_1,\ldots,p_n,\varepsilon} = \{y \in E : p_1(y) < \varepsilon, \ldots, p_n(y) < \varepsilon\}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $p_1, \ldots, p_n \in \mathcal{P}$ bilden eine Umgebungsbasis. Es gibt also eine Umgebung V dieser Form, die in U enthalten ist.
Sei $x \in E$. Setzen wir $c_x := 1 + \max\{p_i(x) : 1 \le i \le n\}$, dann gilt für $1 \le i \le n$:

$$p_i\left(\frac{\varepsilon}{c_x}x\right) = \frac{\varepsilon}{c_x}p_i(x) \le \varepsilon\frac{c_x-1}{c_x} < \varepsilon\,.$$

Also ist $x \in \frac{c_x}{\varepsilon}\cdot V \subseteq \frac{c_x}{\varepsilon}\cdot U$.

Aufgabe G56 (Konvergenz der δ_n)
Sei, wie üblich, $\delta_n : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, $\delta_n(m) := \delta_{n,m}$. Dann liegt δ_n in jedem der Räume $c_0 := c_0(\mathbb{N})$, $\ell^1 := \ell^1(\mathbb{N})$, $\ell^p := \ell^p(\mathbb{N})$ $(1 < p < \infty)$, $\ell^\infty := \ell^\infty(\mathbb{N})$.
Untersuchen Sie die Konvergenz von $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\sigma(c_0,\ell^1)$, $\sigma(\ell^1,c_0)$, $\sigma(\ell^1,\ell^\infty)$, $\sigma(\ell^p,\ell^q)$, $\sigma(\ell^\infty,\ell^1)$, wenn Sie mutig sind, auch in $\sigma(\ell^\infty,(\ell^\infty)')$.

Lösungshinweise: Für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in ℓ^1, c_0 bzw. ℓ^q ist $\lim_{n\to\infty}\langle\delta_n,x_n\rangle = \lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Also konvergiert $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\sigma(c_0,\ell^1)$, $\sigma(\ell^1,c_0)$, $\sigma(\ell^p,\ell^q)$ und $\sigma(\ell^\infty,\ell^1)$ gegen 0.
Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ mit $\liminf_n y_n \ne \limsup_n y_n$, dann konvergiert $(\langle\delta_n,y_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht. Also konvergiert $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht in $\sigma(\ell^1,\ell^\infty)$.
In $\sigma(\ell^\infty,(\ell^\infty)')$ konvergiert $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0: Da $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0 \subseteq \ell^\infty$ ist, genügt es, dies auf Funktionalen in $(c_0)' = \ell^1 \subseteq (\ell^\infty)'$ zu testen. Denn schränkt man ein Funktional in $(\ell^\infty)'$ auf c_0 ein, so ist es wieder stetig und die stetigen Funktionale auf c_0 sind durch Elemente in ℓ^1 gegeben.

Aufgabe G57
Sei $\mathscr{F}$ die Menge der endlichen Folgen in $\ell^1 := \ell^1(\mathbb{N})$. Machen Sie sich klar, dass $(\mathscr{F},||\cdot||_1)' = \ell^\infty$ ist und zeigen Sie:

$$\sigma(\ell^\infty,\ell^1) \ne \sigma(\ell^\infty,\mathscr{F})$$

Geben Sie dazu eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \ell^\infty$ an, die in $\sigma(\ell^\infty,\mathscr{F})$, nicht aber in $\sigma(\ell^\infty,\ell^1)$ konvergiert. Warum kann es sich nur um eine unbeschränkte Folge handeln?

Lösungshinweise: Da $\mathscr{F}$ dicht in ℓ^1 ist, gilt $(\mathscr{F}, ||\cdot||_1)' = \ell^\infty$.
Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \ell^\infty$ beschränkt, dann ist auch $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\varphi_n : \ell^1 \to \mathbb{C} : \; y \mapsto \langle y, x_n\rangle$ beschränkt. Da aus der punktweisen Konvergenz auf totalen Teilmengen für beschränkte Familien von Operatoren die punktweise Konvergenz auf dem gesamten Raum folgt, erhält man in diesem Fall die Konvergenz von $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf ℓ^1 aus der Konvergenz auf der dichten Teilmenge $\mathscr{F} \subseteq \ell^1$.

Sei $x_n := n^3 \cdot \delta_n$ für $n \in \mathbb{N}$ (dann ist $\left\|x_n\right\|_\infty = n^3 < \infty$). Dann existiert für alle $y \in \mathscr{F}$ ein $n_y \in \mathbb{N}$, so dass $\langle x_n, y\rangle = n^3 y_n = 0$ für alle $n \geq n_y$, d.h. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in $\sigma(\ell^\infty, \mathscr{F})$ gegen 0.
Für $y = \left(\frac{1}{n^2}\right) \in \ell^1$ ist aber $\langle x_n, y\rangle = n$, d.h. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht in $\sigma(\ell^\infty, \ell^1)$.

Aufgabe G58 (Schwache Topologie und Norm-Topologie)
Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum.

(a) Zeigen Sie, dass jede schwach konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ beschränkt ist.

(b) Weisen Sie nach, dass die schwache Topologie gröber ist als die Normtopologie.

(c) Zeigen Sie: Ist $(E, \|\cdot\|)$ ein endlich dimensionaler Vektorraum, so ist die schwache Topologie gleich der Norm-Topologie.

(d) Zeigen Sie: Ist $(E, \|\cdot\|)$ ein unendlich dimensionaler Raum, so ist die schwache Topologie ungleich der Normtopologie. *Hinweis:* Zeigen Sie, dass jede Nullumgebung der schwachen Topologie lineare Teilräume enthält.

Lösungshinweise:

(a) Da die Funktionale $E' \ni y' \mapsto \langle x_n, y'\rangle$ punktweise konvergieren und damit beschränkt sind, ist nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit auch $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.

(b) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ mit $\lim_n \left\|x_n - x\right\| = 0$, dann gilt $\left|\langle x_n - x, y'\rangle\right| \leq \left\|x_n - x\right\| \left\|y'\right\| \longrightarrow 0$ für alle $y' \in E'$. Also ist $\mathrm{Id} : (E, \|\cdot\|) \to (E, \sigma(E, E'))$ stetig.

(c) Sei $(\delta_n)_{n=1}^m \subseteq E'$ eine Basis von E', dann wird die schwache Topologie von den Halbnormen $E \ni x \mapsto \left|\delta_n(x)\right|$ und damit auch von der Norm $E \ni x \mapsto \sum_{n=1}^m \left|\delta_n(x)\right|$ auf E erzeugt. Da $\dim E < \infty$ ist, ist diese Norm äquivalent zu $\|\cdot\|$.

(d) Jede Nullumgebung enthält ein Element

$$U_{\varphi_1,\ldots,\varphi_n,\varepsilon} = \left\{x \in E \,:\, \left|\varphi_1(x)\right| < \varepsilon, \ldots, \left|\varphi_n(x)\right| < \varepsilon\right\}$$

für $n \in \mathbb{N}$ mit $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in E'$ der Umgebungsbasis. Offensichtlich ist $\bigcap_{k\leq n} \ker \varphi_k \subseteq U_{\varphi_1,\ldots,\varphi_n,\varepsilon}$. Als Schnitt endlich vieler Hyperebenen ist $\bigcap_{k\leq n} \ker \varphi_k$ ein linearer Teilraum.

Hausübung

Aufgabe H35 (Initiale Topologie) (1 Punkt)

Sei X eine Menge, und für $i \in I$ sei $(Y_i, \mathcal{T}_i)$ ein topologischer Raum, sowie $f_i : X \to Y_i$ eine Abbildung. $\mathcal{T}$ sei die initiale Topologie bezüglich $\{f_i : i \in I\}$. Zeigen Sie:

(a) Ist $(x_j)_{j\in J}$ ein Netz in X, dann gilt

$$\mathcal{T}\text{-}\lim_{j\in J} x_j = x_0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{für alle } i \in I \text{ ist } \; \mathcal{T}_i\text{-}\lim_{j\in J} f_i(x_j) = f_i(x_0)\,.$$

(b) Die Funktion $f : (Y, \mathcal{S}) \to (X, \mathcal{T})$ ist genau dann stetig, wenn für alle $i \in I$ die Funktionen $f_i \circ f : (Y, \mathcal{S}) \to (Y_i, \mathcal{T}_i)$ stetig sind.

Lösungshinweise:

(a) Da definitionsgemäß alle f_i, $i \in I$, bzgl. der initialen Topologie stetig sind, folgt aus $\mathcal{T}\text{-}\lim_{j\in J} x_j = x_0$, dass $\mathcal{T}_i\text{-}\lim_{j\in J} f_i(x_j) = f_i(x_0)$ gilt.

Sei $\mathcal{T}_i\text{-}\lim_{j\in J} f_i(x_j) = f_i(x_0)$ für alle $i \in I$ und U eine Umgebung von x_0. Nach Konstruktion der initialen Topologie existieren Indizes $i_1, \dots, i_n$ und offene Mengen $V_{i_1} \in \mathcal{T}_{i_1}, \dots V_{i_n} \in \mathcal{T}_{i_n}$, so dass

$$\mathcal{T} \ni \bigcap_{k=1}^{n} f_{i_k}^{-1}(V_{i_k}) \subseteq U$$

ist. Nach Voraussetzung existiert für jedes $1 \le k \le n$ ein Index j_k, so dass $f_{i_k}(x_j) \in V_{i_k}$ für alle $j \ge j_k$ ist. Wir wählen $j_0 \ge j_k$ für alle $1 \le k \le n$. Dann ist $x_j \in \bigcap_{k=1}^{n} f_{i_k}^{-1}(V_{i_k})$ für alle $j \ge j_0$, d.h. $\mathcal{T}\text{-}\lim_{j\in J} x_j = x_0$.

(b) Ist f stetig, dann ist auch $f_i \circ f$ stetig, da die Komposition stetiger Abbildungen stetig ist.

Sei $f_i \circ f$ stetig für alle $i \in I$, $x_0 \in Y$ und $V \in \mathcal{T}$ eine Umgebung von $f(x_0)$. Wir zeigen, dass eine Umgebung U von x_0 existiert mit $f(U) \subseteq V$. Nach Konstruktion der initialen Topologie existieren Indizes $i_1, \dots, i_n$ und offene Mengen $W_{i_1} \in \mathcal{T}_{i_1}, \dots W_{i_n} \in \mathcal{T}_{i_n}$, so dass $V \supseteq \bigcap_{k=1}^{n} f_{i_k}^{-1}(W_{i_k})$ und $(f_{i_k} \circ f)(x_0) \in W_{i_k}$ ist. Da $f_{i_k} \circ f$ stetig ist, existieren offene Umgebungen U_{i_k} von x_0, $1 \le k \le n$, mit $f_{i_k} \circ f(U_{i_k}) \subseteq W_{i_k}$. Wir setzen $U := \bigcap_{k=1}^{n} U_{i_k}$, dann ist U eine offene Umgebung von x_0 und $f(U) \subseteq V$.

Aufgabe H36 (Produkttopologie) (1 Punkt)

Wir versehen $\mathbb{R}$ mit der gewohnten Topologie, d.h. $X \subseteq \mathbb{R}$ ist offen, falls für alle $x \in X$ ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $K_\varepsilon(x) = \left\{ y \in \mathbb{R} \,:\, \left| x - y \right| < \varepsilon \right\} \subseteq X$.

(a) Betrachten Sie das kartesische Produkt $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ versehen mit der Produkttopologie. Skizzieren Sie offene Mengen in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Bestimmen Sie eine Umgebungsbasis von $(0,0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

(b) Es sei W das kartesische Produkt $W = [0,1]^{\mathbb{R}}$. Elemente in W können mit Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $[0,1]$ identifiziert werden. Sei nun $(f_i)_{i\in I}$ ein Netz in W mit $f_i : \mathbb{R} \to [0,1]$.

Zeigen Sie: Das Netz $(f_i)_{i\in I}$ konvergiert in der Produkttopologie gegen eine Funktion f genau dann, wenn $(f_i)_{i\in I}$ punktweise gegen f konvergiert.

(c) Sei $\mathcal{E}$ die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{R}$, gerichtet durch Inklusion. Ferner sei für $E \subseteq \mathbb{R}$

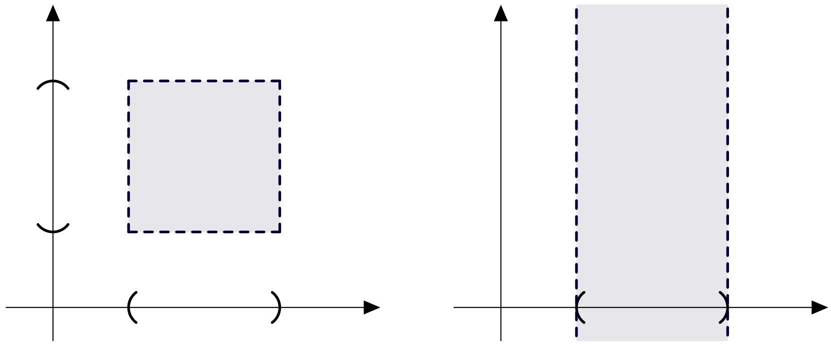
$$\chi_E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in E, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie: $(\chi_E)_{E\in\mathcal{E}}$ ist ein Netz in W mit $\lim\limits_{E\in\mathcal{E}} \chi_E = \chi_{\mathbb{R}}$ in der Produkttopologie.

(d) Zeigen Sie: Es gibt keine Teilfolge von $(\chi_E)_{E\in\mathcal{E}}$, die gegen $\chi_{\mathbb{R}}$ konvergiert.

Lösungshinweise:

(a) Die Menge $\left\{(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}) \times (-\frac{1}{n},\frac{1}{n}) \,:\, n \in \mathbb{N}\right\}$ bildet eine Umgebungsbasis.



(b) Betrachte $\delta_x : W \to [0,1] : f \mapsto f(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ und wende Aufgabe H35(a) an.

(c) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert ein $E_x \in \mathcal{E}$, so dass $x \in E_x$ ist. Für $E \geq E_x$ gilt also $\chi_E(x) = 1 = \chi_{\mathbb{R}}(x)$. Damit konvergiert $(\chi_E)_{E\in\mathcal{E}}$ punktweise und nach (b) auch in der Produkttopologie.

(d) Sei $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E}$, dann existiert ein $x \in \mathbb{R}$, welches nicht in der abzählbaren Menge $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ liegt, und es gilt $\chi_{E_n}(x) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist $\lim_n \chi_{E_n}(x) = 0 \neq \chi_{\mathbb{R}}(x)$, d.h. $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht punktweise und damit nach (b) auch nicht in der Produkttopologie.

Aufgabe H37 (Adjungierte auf lokalkonvexen Vektorräumen) (1 Punkt)

Sei $(E,\mathcal{P})$ lokalkonvex, $E' := \{f' : E \to \mathbb{K} \text{ linear und stetig}\}$ der Dual von $(E,\mathcal{P})$. Zeigen Sie:

(a) Ein lineares Funktional $f' : (E,\mathcal{P}) \to \mathbb{K}$ ist stetig genau dann wenn es $\sigma(E,E')$-stetig ist.

(b) Ist $(F,\mathcal{P}')$ ein weiterer lokalkonvexer Vektorraum, und ist $T : E \to F$ $\sigma(E,E')$-$\sigma(F,F')$-stetig, dann existiert $T' : F' \to E'$ sodass $\langle Tx, f'\rangle = \langle x, T'f'\rangle$ für alle $f' \in F'$ und T' ist $\sigma(F',F)$-$\sigma(E',E)$-stetig.

(c) Sind E, F Banachräume und ist $T : E \to F$ $\sigma(E,E')$-$\sigma(F,F')$-stetig, dann ist T normstetig, also beschränkt.

Hinweis: Für den letzten Teil können Sie sich am Beweis von 10.13 der Vorlesung orientieren.

Lösungshinweise:

(a) Sei $f' : (E,\mathcal{P}) \to \mathbb{K}$ stetig und $(x_i)_{i\in I} \subseteq E$ mit $\sigma(E,E')$-$\lim_i x_i = x_0$, d.h. für alle $g' \in E'$ ist $\lim_i g'(x_i) = g'(x_0)$. Da $f' \in E'$ ist, ist f' offensichtlich $\sigma(E,E')$-stetig.

Sei $f' : (E,\mathcal{P}) \to \mathbb{K}$ $\sigma(E,E')$-stetig und $(x_i)_{i\in I} \subseteq E$ mit $\mathcal{P}$-$\lim_i x_i = x_0$. Dann gilt $\lim_i g'(x_i) = g'(x_0)$ für alle $g' \in E'$ ($g' \in E'$ ist stetig), d.h. $\sigma(E,E')$-$\lim_i x_i = x_0$. Aus der $\sigma(E,E')$-Stetigkeit von f' folgt $\lim_i f'(x_i) = f'(x_0)$. Da $(x_i)_{i\in I}$ ein beliebiges konvergentes Netz war, ist f' auch stetig.

(b) Wir definieren $T' : F' \to E'$ durch $T'f'(x) := \langle Tx, f' \rangle$ für $f' \in F'$ und $x \in E$. Sei $(f_i')_{i \in I} \subseteq F'$ mit $\sigma(F', F)$- $\lim_i f_i' = f_0'$, dann gilt für alle $x \in E$:

$$T'f_i'(x) = \langle Tx, f_i' \rangle = f_i'(Tx) \longrightarrow f_0'(Tx) = \langle Tx, f_0' \rangle = T'f_0'(x)\,,$$

d.h. $\sigma(E', E)$- $\lim_i T'f_i' = T'f_0'$. Also ist T' $\sigma(F', F)$-$\sigma(E', E)$-stetig.

(c) Sei $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge im Graphen $\mathcal{G}(T)$ von T, d.h. $y_n = Tx_n$ für $n \in \mathbb{N}$, $\|\cdot\|$ - $\lim_n x_n = x_0$ und $\|\cdot\|$ - $\lim_n y_n = y_0$. Dann ist auch $\sigma(E, E')$- $\lim_n x_n = x_0$ und aus der Stetigkeit von T folgt $\sigma(F, F')$- $\lim_n Tx_n = Tx_0$. Sei $f' \in F'$, dann gilt:

$$\langle y_0, f' \rangle = \langle \lim_n Tx_n, f' \rangle = \lim_n \langle Tx_n, f' \rangle = \langle Tx_0, f' \rangle\,.$$

Aus Hahn-Banach folgt $Tx_0 = y_0$; also ist $\mathcal{G}(T)$ abgeschlossen. Mit dem Satz vom abgeschlossenen Graphen ist T beschränkt.