Funktionalanalysis
12. Übungsblatt (mit Lösungshinweisen)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Andreas Gärtner

Wintersemester 2012/2013
24./25. Januar 2013

Gruppenübung

Aufgabe G50 (Reelle und komplexe lineare Funktionale)
Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Zeigen Sie, dass für die *reell-linearen* Funktionale $f : V \to \mathbb{C}$ und $g : V \to \mathbb{R}$ folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) Für alle $x \in V$ ist $f(x) = g(x) - i\,g(i\,x)$.

(ii) Die Abbildung f ist $\mathbb{C}$-linear und $g = \Re f$.

Lösungshinweise:

(i) $\Rightarrow$ (ii) Offensichtlich ist $g = \Re f$ und da f $\mathbb{R}$-linear ist, genügt es $f(i\,x) = i\,f(x)$ zu zeigen. Sei $x \in V$, dann gilt:

$$f(i\,x) = g(i\,x) - i\,g(-x) = i\,(-i\,g(i\,x) - g(-x)) = i\,(-i\,g(i\,x) + g(x)) = i\,f(x)\,.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Für $x \in V$ gilt:

$$f(x) = \Re f(x) + i\,\Im f(x) = g(x) + i\,(-\Re(i\,f(x))) = g(x) - i\,(\Re f(i\,x)) = g(x) - i\,g(i\,x)\,.$$

Aufgabe G51 (Eigenschaften der Adjungierten eines Operators)
Seien E, F und G normierte Räume und $S, T \in \mathscr{L}(E,F)$. Zeigen Sie, dass gilt:

(a) Die Adjungierte $T' : F' \to E'$ von T ist stetig und $\left\|T'\right\|_{\mathrm{Op}} = \|T\|_{\mathrm{Op}}$.

Hinweis: Betrachten Sie $x \in E$, $\varphi \in F'$ mit $\|x\| = 1 = \left\|\varphi\right\|$ und $\varphi(Tx) = \|Tx\| = \|T\|_{\mathrm{Op}} - \varepsilon$.

(b) Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ ist $(\alpha T + \beta S)' = \alpha T' + \beta S'$. (Vgl. Hilbertraum-Adjungierte!)

(c) Für die Einschränkung $T''|_E$ von $T'' : E'' \to F''$ auf E gilt $T''|_E = T$.

(d) Für $R \in \mathscr{L}(F,G)$ ist $(R \circ S)' = S' \circ R'$.

Lösungshinweise:

(a) Für $\varphi \in F'$ gilt:

$$\begin{aligned}\left\|T'\varphi\right\| &= \sup\left\{\left|\langle x, T'\varphi\rangle\right| \,:\, x \in E \text{ mit } \|x\| \le 1\right\} = \left\{\left|\langle Tx, \varphi\rangle\right| \,:\, x \in E \text{ mit } \|x\| \le 1\right\} \\ &\le \left\{\|T\|_{\mathrm{Op}}\,\|x\|\,\left\|\varphi\right\| \,:\, x \in E \text{ mit } \|x\| \le 1\right\} \le \|T\|_{\mathrm{Op}}\left\|\varphi\right\|\,.\end{aligned}$$

Also ist $\left\|T'\right\|_{\mathrm{Op}} \leq \|T\|_{\mathrm{Op}}$. Sei $\varepsilon > 0$ und $x \in E$, $\varphi \in F'$ mit $\|x\| = 1 = \left\|\varphi\right\|$ und $\varphi(Tx) = \|Tx\| = \|T\|_{\mathrm{Op}} - \varepsilon$ (Warum gibt es so ein φ?). Dann gilt:

$$\|T\|_{\mathrm{Op}} \leq \|Tx\| + \varepsilon = \langle Tx, \varphi\rangle + \varepsilon = \langle x, T'\varphi\rangle + \varepsilon \leq \left\|T'\right\|_{\mathrm{Op}} + \varepsilon\,.$$

Für $\varepsilon \to 0$ folgt nun die Behauptung.

(b) Nachrechnen!

(c) Aus (a) folgt die Existenz von $T'' : E'' \to F''$ und $\left\|T''\right\|_{\mathrm{Op}} = \|T\|_{\mathrm{Op}}$. Sei $x \in E$, $\varphi \in F'$ und $\hat{x} : E' \to \mathbb{K} : \psi \mapsto \psi(x)$, d.h. $\hat{x} \in E''$. Es gilt:

$$\langle \varphi, T''\hat{x}\rangle = \langle T'\varphi, \hat{x}\rangle = \hat{x}(T'\varphi) = T'\varphi(x) = \langle x, T'\varphi\rangle = \langle Tx, \varphi\rangle = \varphi(Tx)\,.$$

Also folgt $T''\hat{x} = \widehat{Tx}$.

(d) Nachrechnen!

Aufgabe G52 (Adjungierte eines Funktionals)
Sei $(E, \|\cdot\|)$ normiert. Interpretieren Sie $f \in E'$ als lineare Abbildung in $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$. Berechnen Sie die Adjungierte in $\mathscr{L}(\mathbb{K}, E')$.

Lösungshinweise: Für $x \in E$, $f \in E'$ und $\lambda \in \mathbb{K} = \mathbb{K}'$ gilt:

$$\lambda \cdot f(x) = \langle f(x), \lambda\rangle = \langle x, f'\lambda\rangle = f'\lambda(x)\,.$$

Also ist $f' : \mathbb{K} \to E' : \lambda \mapsto \lambda \cdot f$ die Adjungierte von f.

Aufgabe G53 (Inklusionen der L^p-Räume für endliche Maße)
Sei (Ω, μ) ein *endlicher* Maßraum und $1 \leq q \leq p \leq \infty$. Zeigen Sie, dass $L^p(\Omega, \mu) \subseteq L^q(\Omega, \mu)$ ist.

Hinweis: Betrachten Sie die Mengen $\{|f| \leq 1\} \subseteq \Omega$ und $\{|f| > 1\} := \{\omega \in \Omega : |f(\omega)| > 1\} \subseteq \Omega$.

Lösungshinweise: Sei $f \in L^p(\Omega, \mu)$, d.h. $\left\|f\right\|_p^p = \int \left|f\right|^p < \infty$, dann gilt:

$$\begin{aligned}\int \left|f\right|^q &= \int_{\{|f|>1\}} \left|f\right|^q + \int_{\{|f|\leq 1\}} \left|f\right|^q \leq \int_{\{|f|>1\}} \left|f\right|^q + \mu\Big(\{|f| \leq 1\}\Big)\\ &\leq \int_{\{|f|>1\}} \left|f\right|^p + \mu(\Omega) \leq \left\|f\right\|_p^p + \mu(\Omega) < \infty\,.\end{aligned}$$

Aufgabe G54 (Fortsetzungen linearer Operatoren auf L^p für endliche Maße)
Sei (Ω, Σ, μ) ein endlicher Maßraum, $2 \leq p < \infty$ und q konjugiert zu p (d.h. $q \leq p$). Sei $T : L^p(\Omega, \mu) \to L^p(\Omega, \mu)$ ein stetiger Operator und $T' : \left(L^p(\Omega, \mu)\right)' = L^q(\Omega, \mu) \to L^q(\Omega, \mu)$ dessen Adjungierte. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) $L^p(\Omega, \mu)$ ist invariant unter T', d.h. $T'\big(L^p(\Omega, \mu)\big) \subseteq L^p(\Omega, \mu)$.

(ii) Es existiert ein stetiger Operator $\tilde{T} : L^q(\Omega, \mu) \to L^q(\Omega, \mu)$ mit $\tilde{T}|_{L^p(\Omega,\mu)} = T$, d.h. T lässt sich auf $L^q(\Omega, \mu)$ fortsetzen.

Hinweis: Betrachten Sie die Adjungierte von $T'|_{L^p(\Omega,\mu)}$ und von $\tilde{T}$.

Lösungshinweise:

(i) ⇒ (ii) Sei $T^+ := T'|_{L^p(\Omega,\mu)} : L^p(\Omega,\mu) \to L^p(\Omega,\mu)$ und $\tilde{T} := (T^+)'$. Da $2 \le p < \infty$ ist, folgt $q = \frac{p}{p-1} \le p$ und damit $L^p(\Omega,\mu) \subseteq L^q(\Omega,\mu) \cong \big(L^p(\Omega,\mu)\big)'$ (vgl. Aufgabe G53).
Nun gilt für $f, g \in L^p(\Omega,\mu)$:

$$\langle \tilde{T} f, g\rangle = \langle f, T^+ g\rangle = \langle f, T' g\rangle = \langle T f, g\rangle \,.$$

Also ist $\tilde{T} : L^q(\Omega,\mu) \to L^q(\Omega,\mu)$ ein stetiger Operator mit $\tilde{T} f = T f$ für alle $f \in L^p(\Omega,\mu)$.

(ii) ⇒ (i) Es gilt $\big(L^q(\Omega,\mu)\big)' \cong L^p(\Omega,\mu)$ und mit $\tilde{T}' : L^p(\Omega,\mu) \to L^p(\Omega,\mu)$ bezeichnen wir die Adjungierte von $\tilde{T}$. Sei $f, g \in L^p(\Omega,\mu) \subseteq L^q(\Omega,\mu)$, dann gilt:

$$\langle T' f, g\rangle = \langle f, T g\rangle = \langle f, \tilde{T} g\rangle = \langle \tilde{T}' f, g\rangle \,.$$

Also folgt $T' f = \tilde{T}' f \in L^p(\Omega,\mu)$ für $f \in L^p(\Omega,\mu)$.

Hausübung

Aufgabe H32 (Nicht immer gibt es stetige lineare Funktionale) (1 Punkt)

Sei $0 < p < 1$ und sei wie üblich $\mathscr{L}^p([0,1]) := \{f : [0,1] \to \mathbb{C} \text{ messbar} : \int_0^1 |f|^p \,\mathrm{d}\lambda < \infty\}$ und $L^p([0,1])$ der Quotient von $\mathscr{L}^p([0,1])$ nach den Funktionen, die λ-fast überall verschwinden. λ bezeichne das Lebesgue-Maß. Dann ist $L^p([0,1])$ immer noch ein Vektorraum, wie man leicht sieht. Zeigen Sie:

(a) Sei $d(f,g) := \int_0^1 |f-g|^p \,\mathrm{d}\lambda$ für $f, g \in L^p([0,1])$, dann definiert d eine Metrik auf $L^p([0,1])$.

(b) Sei $C \subseteq L^p([0,1])$ eine offene konvexe Nullumgebung, dann ist $C = L^p([0,1])$.
Hinweis: Wählen Sie $\varepsilon > 0$, sodass $\{f \in L^p([0,1]) : d(f,0) < \varepsilon\} \subseteq C$ und zeigen Sie: Jedes $f \in L^p([0,1])$ liegt in der konvexen Hülle von $\{f \in L^p([0,1]) : d(f,0) < \varepsilon\}$. Zerlegen Sie dazu geeignet $[0,1] = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_n$ und schreiben Sie f als Konvexkombination $f = \sum_i \frac{1}{n}(n \cdot \chi_{I_i} \cdot f)$.

(c) Das einzige stetige lineare Funktional auf $(L^p([0,1]), d)$ ist das Nullfunktional.

Lösungshinweise:

(a) Positivität, Definitheit und Symmetrie sind offensichtlich. Seien $f, g, h \in L^p([0,1])$, dann gilt:

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f-g|^p \,\mathrm{d}\lambda &= \int_0^1 |f-h+h-g|^p \,\mathrm{d}\lambda \le \int_0^1 \big(|f-h|+|h-g|\big)^p \,\mathrm{d}\lambda \\ &\le \int_0^1 |f-h|^p + |h-g|^p \,\mathrm{d}\lambda \le \int_0^1 |f-h|^p \,\mathrm{d}\lambda + \int_0^1 |h-g|^p \,\mathrm{d}\lambda \,.\end{aligned}$$

Also gilt auch die Dreiecksungleichung.

(b) Da C offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $U := K_\varepsilon(0) = \{f \in E \,:\, d(f,0) < \varepsilon\} \subseteq C$ ist.
Sei $f \in L^p([0,1])$, dann können wir $[0,1]$ in disjunkte Intervalle I_i zerlegen, d.h. $[0,1] = I_1 \dot\cup \ldots \dot\cup I_n$, so dass $\int_{I_i} |f|^p \,\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{n} d(f,0)$ ist für jedes $1 \le i \le n$.
Dann ist $f = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n}(n \cdot \chi_{I_i} \cdot f)$ und es gilt:

$$\int_0^1 |n \cdot \chi_{I_i} \cdot f|^p \,\mathrm{d}\lambda = n^p \int_0^1 \chi_{I_i} |f|^p \,\mathrm{d}\lambda = n^p \int_{I_i} |f|^p \,\mathrm{d}\lambda = \frac{n^p}{n} d(f,0).$$

Da $\lim_n \frac{n^p}{n} = 0$ und $\int_0^1 |f|^p \,\mathrm{d}\lambda < \infty$ ist, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{n^p}{n} d(f,0) < \varepsilon$ für alle $n \ge n_0$. Also ist $(n \cdot \chi_{I_i} \cdot f) \in U \subseteq C$ für $n \ge n_0$ und alle $1 \le i \le n$. Da C konvex ist, folgt $f \in C$ und damit $L^p([0,1]) \subseteq C$.

(c) Ist φ ein stetiges lineares Funktional auf $(L^p([0,1]), d)$, dann ist $\Phi : f \mapsto |\varphi(f)|$ eine stetige Halbnorm. Da $[0,1)$ eine offene, konvexe Menge in $[0,\infty)$ ist, muss $\Phi^{-1}([0,1))$ offen und konvex in $L^p([0,1])$ sein.
Aus $0 \in \Phi^{-1}([0,1))$ und Teil (b) folgt nun $\Phi^{-1}([0,1)) = L^p([0,1])$ und damit $\operatorname{ran}\Phi = [0,1)$. Es kann aber nur eine beschränkte Halbnorm auf $L^p([0,1])$ geben und wir erhalten $\Phi = 0$ und damit $\varphi = 0$.

Aufgabe H33 (Banachlimiten) (1 Punkt)

Sei $S : \ell^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}) \to \ell^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{N})$ der Linksshift auf den beschränkten reellwertigen Folgen, d.h. $S(x)(n) = x(n+1)$ für $x = (x(n))_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{N})$. Ein lineares Funktional $\psi : \ell^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ mit $\|\psi\| = 1$ heißt *Banachlimes*, falls ψ translationsinvariant und positiv ist, d.h. $\psi(x) = \psi(S(x))$ für alle $x \in \ell^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{N})$ und $\psi(x) \ge 0$, falls $x \ge 0$ ist (d.h. $x(n) \ge 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$).

(a) Zeigen Sie, dass
- $\mathcal{M} := \overline{\{x - S(x) \,:\, x \in \ell^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{N})\}}$ ein linearer Teilraum von $\ell^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{N})$ und
- $d(\mathbb{1}, \mathcal{M}) := \inf\{\|\mathbb{1} - y\| \,:\, y \in \mathcal{M}\} = 1$ ist und dass
- ein positives Funktional $\varphi : \ell^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ mit $\|\varphi\| = 1$ existiert, das auf $\mathcal{M}$ verschwindet.

Folgern Sie daraus die Existenz eines Banachlimes.
Hinweis: Für $x \in \ell^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{N})$ gilt wie bei reellen Zahlen: $0 \le x \le \mathbb{1} \iff \|\mathbb{1} - x\|_\infty \le 1$.

(b) Zeigen Sie: Für jeden Banachlimes $\psi : \ell^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ und alle $x \in \ell^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{N})$ gilt:

$$\psi(\mathbb{1}) = \|\psi\| = 1 \qquad \text{und} \qquad \liminf_{n\to\infty} x(n) \le \psi(x) \le \limsup_{n\to\infty} x(n)$$

(für eine konvergente Folge $x \in c(\mathbb{N})$ ist also $\psi(x) = \lim_n x(n)$).
Hinweis: Betrachten Sie $S^N(x - \alpha\mathbb{1})$ und $S^N(\beta\mathbb{1} - x)$ für $\alpha < \liminf_n x(n)$, $\beta > \limsup_n x(n)$.

(c) Sei $\psi : \ell^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ ein Banachlimes und $x = (a, b, a, b, \ldots) \in \ell^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{N})$. Bestimmen Sie $\psi(x)$.

Lösungshinweise:

(a) Als Abschluss des Bildes von $(\mathrm{Id} - S)$ ist $\mathcal{M}$ ein abgeschlossener linearer Teilraum von $\ell^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{N})$. Sei $y = x - S(x) \in \mathcal{M}$ mit $\|\mathbb{1} - y\|_\infty = 1 - \delta \le 1$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist dann $y(n) = x(n) - x(n+1)$ und $y(n) \ge \delta$ und es folgt:

$$x(n+1) = x(n) - y(n) = \cdots = x(0) - \sum_{i=1}^n y(i) \le x(0) - n\delta.$$

Daraus folgt $\delta = 0$ und da Elemente der Form $y = x - S(x)$ dicht in $\mathcal{M}$ sind, erhalten wir $d(\mathbb{1}, \mathcal{M}) = 1$. Nach dem Trennungssatz für abgeschlossene Teilräume existiert ein $\varphi \in (\ell^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}))'$ mit $\|\varphi\| \le 1$, $\varphi|_{\mathcal{M}} = 0$ und $\varphi(\mathbb{1}) = 1$.
Sei $x \in \ell^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{N})$ positiv und o.B.d.A. $\|x\|_\infty \le 1$. Dann ist $0 \le x \le \mathbb{1}$ und wir erhalten:

$$\left|1 - \varphi(x)\right| = \left|\varphi(\mathbb{1}) - \varphi(x)\right| = \left|\varphi(\mathbb{1} - x)\right| \le \left\|\varphi\right\| \|\mathbb{1} - x\|_\infty \le 1\,.$$

Daraus folgt $0 \le \varphi(x) \le 1$. Also φ ist positiv, translationsinvariant und $\|\varphi\| = 1$ und damit ein Banachlimes.

(b) Offensichtlich ist $\psi(\mathbb{1}) \le 1$. Um $\psi(\mathbb{1}) \ge 1$ zu zeigen, wählen wir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \ell^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{N})$ mit $\|x_n\|_\infty \le 1$, so dass $\lim_n \psi(x_n) = 1$ ist. Dann ist $\mathbb{1} - x_n \ge 0$ und

$$0 \le \psi(\mathbb{1} - x_n) = \psi(\mathbb{1}) - \psi(x_n),$$

d.h. $\psi(\mathbb{1}) \ge \psi(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Seien $\alpha < \liminf_n x(n)$ und $\beta > \limsup_n x(n)$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\alpha < x(n) < \beta$ gilt für alle $n \ge N$. Also sind $S^N(x) - \alpha\mathbb{1} \ge 0$ und $\beta\mathbb{1} - S^N(x) \ge 0$ und es gilt:

$$\begin{aligned} 0 &\le \psi(S^N(x) - \alpha\mathbb{1}) = \psi(x) - \alpha \qquad &\Rightarrow \qquad &\alpha \le \psi(x)\,, \\ 0 &\le \psi(\beta\mathbb{1} - S^N(x)) = \beta - \psi(x) \qquad &\Rightarrow \qquad &\psi(x) \le \beta\,. \end{aligned}$$

Es folgt $\liminf_n x(n) - \varepsilon \le \psi(x) \le \limsup_n x(n) + \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$ und damit die Behauptung.

(c) Mit Teil (b) folgt:

$$\psi(x) = \tfrac{1}{2}(\psi(x) + \psi(x)) = \tfrac{1}{2}\psi(x + S(x)) = \tfrac{1}{2}\psi(a+b, a+b, \ldots) = \tfrac{1}{2}(a+b)\,.$$

Aufgabe H34 (Stetigkeit von Fortsetzungen linearer Funktionale) (1 Punkt)
Sei $\mathscr{H}$ ein Hilbertraum, $\mathcal{M} \subseteq \mathscr{H}$ ein abgeschlossener Teilraum und $B_{\mathcal{M}} \subseteq \mathcal{M}$ eine Hamel-Basis aus Einheitsvektoren. Weiter sei B eine Hamel-Basis von $\mathscr{H}$, die $B_{\mathcal{M}}$ und eine Folge von Einheitsvektoren $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{H} \setminus \mathcal{M}$ enthält, so dass $\lim\limits_{n\to\infty} \langle x_n, y_0\rangle = 1$ ist für ein $y_0 \in B_{\mathcal{M}}$.

(a) Geben Sie ein konkretes Beispiel für diese Situation an.

(b) Sei $f : \mathcal{M} \to \mathbb{K}$ ein stetiges lineares Funktional und sei das Funktional $F : \mathscr{H} \to \mathbb{K}$ definiert durch $F(y) := f(y)$ für $y \in B_{\mathcal{M}}$ und $F(x) := 0$ für $x \in B \setminus B_{\mathcal{M}}$. Ist F eine stetige Fortsetzung von f? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösungshinweise:

(a) Sei $\mathscr{H} := \ell^2(\mathbb{N}_0)$ mit ONB $(e_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $\mathcal{M} := \operatorname{span}\{e_0\}$. Wir wählen $y_0 := e_0 \in \mathcal{M}$ und $x_n := \left(1 - \frac{1}{n}\right)e_0 + \sqrt{\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}\, e_n \in \mathscr{H} \setminus \mathcal{M}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann sind die Vektoren $\{y_0, x_1, x_2, \ldots\}$ linear unabhängig, $\|y_0\| = \|x_n\| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \langle x_n, y_0\rangle = 1 - \frac{1}{n} = 1$.

(b) Sei $M \in \mathbb{N}$ dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\left|1 - \langle x_n, y_0\rangle\right| < \frac{1}{2M^2}$ ist für alle $n \ge n_0$ und es folgt:

$$\begin{aligned} \left\|y_0 - x_n\right\|^2 &= \langle y_0 - x_n, y_0 - x_n\rangle = \langle y_0, y_0\rangle - \langle x_n, y_0\rangle - \langle y_0, x_n\rangle + \langle x_n, x_n\rangle \\ &\le \left|1 - \langle x_n, y_0\rangle\right| + \left|1 - \langle y_0, x_n\rangle\right| = 2\left|1 - \langle x_n, y_0\rangle\right| < \tfrac{1}{M^2}\,. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\left|F(y_0 - x_n)\right| = \left|F(y_0) - F(x_n)\right| = |1 - 0| = 1 = M\tfrac{1}{M} > M\left\|y_0 - x_n\right\|\,;$$

die Fortsetzung F von f ist also unbeschränkt.